Enseignement des mathématiques et approche par les compétences

Benaouda BENNACEUR*

1. Introduction

Lorsqu'on introduit une nouvelle réforme, il est légitime de s'interroger sur ses finalités, pourquoi donc une réforme du système éducatif, pourquoi celle-là et maintenant ?

Le moins que l'on puisse dire c'est que l'ancienne réforme, celle du système éducatif engagée dans les années 70, n'a pas tenu ses engagements pédagogiques, scientifiques et culturels dans la mesure où ni le niveau scientifique des élèves ni leur capacité à mobiliser des connaissances scolaires pour résoudre des problèmes ni leur ouverture d'esprit n'ont été à la hauteur des déclarations officielles et généreuses sur les buts d'ordre pédagogiques et éthiques de cette réforme.

Il est louable de vouloir changer de politique éducative lorsqu'on se rend compte que celle que l'on veut abandonner est loin d'avoir donné les résultats promis et ne correspond plus ni aux attentes anciennes ni aux attentes nouvelles de la société. Seulement la nouvelle politique éducative, si elle n'est pas élaborée en concertation avec ceux qui sont chargés de l'appliquer, doit pour le moins être clairement expliquée dans ses fondements, dans ses principes et dans sa philosophie aux acteurs de cette réforme qui ont la mission de la mettre en œuvre.

La démarche pédagogique portée par la nouvelle réforme et initiée à partir de 2003 replace officiellement l'élève au cœur des efforts d'enseignement pour arriver à un réel apprentissage du savoir enseigné. Pour cela, l'approche par compétence souligne,

* Enseignant en mathématiques, Université d'Oran-Es-Sénia ; chercheur associé au Crasc.

non sans raison, la nécessité de définir et formuler ce que l'élève doit savoir faire en fin d'apprentissage afin que le savoir enseigné soit un savoir opérationnel dans une situation problématique pour l'élève. Mais qu'est ce qu'un savoir capable d'opérer ? C'est un savoir dont l'appropriation et l'utilisation peut rendre compte d'une compétence de l'élève lorsque celui-ci doit résoudre une question dans le cadre scolaire ou extra scolaire. Ainsi, la compétence d'un élève n'est pas autre chose que la mise en œuvre d'une organisation pertinente de savoirs conceptuels et méthodologiques afin d'amener une réponse pertinente à un problème posé. Mais comment faire ? Comment enseigner pour que ce savoir enseigné soit potentiellement une ressource mobilisable à des fins de résolution de problèmes ?

L'histoire nous apprend amplement que les théories scientifiques et les concepts qui les constituent naissent, se développent et évoluent vers plus de précision, de rigueur et de technicité, voire de sophistication, sur des chantiers de problèmes. C'est pourquoi (et l'expérience le prouve) la connaissance enseignée, pour qu'elle ait des chances d'être acquise par l'élève, devrait être problématisée et devenir grâce à un dispositif didactique approprié une réponse à une question posée en classe. Une telle connaissance serait pourvue de sens aux yeux de l'élève puisqu'elle a servi à quelque chose. De même que les concepts se construisent par des questions, on apprend en essayant de répondre à des questions que l'on a pu s'approprier en classe.

Or il se trouve que l'enseignement traditionnel ne privilégie nullement un tel enseignement par les problèmes et l'on peut même dire qu'il privilégie (consciemment ou non) l'absence de sens par une démarche pédagogique où le savoir enseigné, en mathématiques particulièrement, est, de par sa décontextualisation, abstrait, général et provoque un déséquilibre entre le concept-objet et le concept-outil[1] au dépens de ce dernier.

On comprend alors pourquoi l'approche par compétence convoque la situation-problème en tant que situation didactique d'apprentissage visant à l'acquisition d'une connaissance disciplinaire, à une acquisition méthodologique et à une socialisation de l'élève. La situation-problème peut, à son tour, devenir ainsi une pratique sociale de référence. En effet, un savoir appris en classe ne se réduit pas à une connaissance disciplinaire isolée car pour être appris il a fallu se confronter[2] à d'autres, à les écouter, à les contredire, à essayer de les convaincre, bref à apprendre à communiquer avec autrui[3].

Le débat sociocognitif qui met en relation de travail et d'écoute les élèves entre eux est une dimension non négligeable de la situation-problème. Une dimension qu'il ne s'agit non seulement pas d'occulter dans nos classes mais au contraire d'encourager le plus possible.

Cela étant dit, l'enseignement au primaire comporte plusieurs enjeux : il y a des enjeux à caractères disciplinaires mais il y a aussi l'enjeu qui transcende les disciplines tout en partant de considérations disciplinaires, il s'agit de **l'enjeu de socialisation de l'élève**. Notre conviction est que, particulièrement dans notre pays où dans les rapports humains l'aspect conflictuel prend le pas sur les autres aspects, la socialisation de l'élève devrait

[1] " Les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir culturellement et socialement organisé " (S. Johsua – J.J. Dupin dans : « *Introduction à la didactiques des sciences et des mathématiques* »). Mais si le concept n'est vu que selon un objet à enseigner dans une pratique d'enseignement déproblématisante, cette " dialectique outil-objet " est hors circuit et le savoir n'est plus construit mais seulement exposé à une hypothétique compréhension des élèves.

[2] En effet, la situation-problème comporte, dans sa mise en œuvre, une dimension sociale dans la mesure où les élèves sont, en principe, organisés en plusieurs groupes de travail en classe.

[3] Dans les situations-problèmes " on y apprend de quoi comprendre le monde ; on s'y construit autant que l'on construit son propre savoir ; on s'y construit autonome" (Philipe Mérieu dans « Apprendre…oui mais comment »)

constituer un premier fil conducteur de l'institution scolaire, surtout dans les premières années du primaire. L'approche par compétence, en se centrant sur l'élève, nous donne l'opportunité de suivre ce fil en adaptant des situations selon la discipline enseignée.

2. L'approche par compétences dans nos classes

1. Socialisation et compétences : dès sa scolarisation, la problématique des compétences à acquérir chez l'élève peut se traduire par la recherche de situations-problèmes qui tendent à développer chez l'élève des capacités de socialisation, parmi lesquelles on peut citer les capacités :

- à écouter l'autre sans l'interrompre
- à verbaliser, c'est-à-dire employer les mots pour communiquer, informer, expliquer, se comprendre, convaincre, etc.
- à engager un travail commun avec d'autres élèves

Il est clair qu'il s'agit là d'un apprentissage de longue haleine, c'est pourquoi il est nécessaire de le commencer très tôt et de ne pas cesser de le poursuivre tout au long de la scolarité de l'élève. Si savoir communiquer par le dialogue et si savoir travailler ensemble ne sont pas des savoirs enseignables, il n'en reste pas moins qu'ils relèvent de compétences humaines dont la société toute entière a besoin. La vocation de l'école n'est-elle pas aussi de préparer l'enfant à l'exercice d'une certaine citoyenneté, c'est-à-dire à l'exercice de rapports humains qui obéissent à certaines règles et valeurs partagées par tous ? Éduquer n'est-il pas aussi préparer à l'enfant à s'intégrer dans des rapports sociaux à l'intérieur et en dehors de l'espace scolaire ?

2. Nombres et abstraction au primaire : qu'en est-il dans les établissements scolaires de cette application de l'approche par compétences, plus précisément en mathématiques ?

Le deuxième fil conducteur, propre à l'enseignement des mathématiques cette fois-ci, est le **souci constant du sens** dans cet enseignement. On ne peut exiger de l'élève une compétence, c'est-à-dire un recours à des savoirs disciplinaires et méthodologiques dans l'action de résoudre un problème, si les savoirs à mobiliser dans cette action n'ont acquis aucune espèce de significations pour cet élève.

Au primaire, la référence au concret, à des situations réelles de la vie de tous les jours peuvent être sources de significations des notions mathématiques.

C'est pourquoi, en classe, pour ce que nous avons vu, nous pensons que l'abstraction est introduite trop tôt et sans préparation dans l'enseignement relatif aux nombres.

Un nombre décontextualisé, c'est-à-dire un nombre non associé à un objet concret du domaine où vit l'enfant est une abstraction qui ne peut avoir de sens pour cet enfant. Cette abstraction conduit à une autre abstraction : celle qui met en jeu plusieurs nombres, à savoir les opérations arithmétiques comme l'addition ou la soustraction, aussi petits que soient ces nombres mis en jeu.

Dans la question des opérations, les nécessaires étapes menant de l'intuitif et du sensible vers l'abstrait exigent d'additionner, au sens d'ajouter, des objets ou des grandeurs qui s'ajoutent aux yeux de l'enfant. Ainsi avant d'additionner des nombres, il faudrait *ajouter* des grandeurs ou des objets. Prenons des objets qui ont une propriété commune, la longueur par exemple (la longueur est une grandeur) et en les mettant bout à bout (on met bout à bout deux règles, ce qui est le plus simple) on montre l'addition de deux longueurs. De même pour les volumes, il s'agira plus d'ajouter dans des récipients des volumes d'eau par exemple que de comparer abstraitement des récipients de capacités différentes (voir le livre de l'élève de la quatrième année primaire).

Il nous semble que ce qui compte dans cette problématique de l'apprentissage de l'élève et du développement de l'enfant c'est **l'expérimentation** : l'élève-enfant doit pouvoir faire des expériences et **manipuler des objets**. Or il est frappant de constater l'absence d'outils didactiques mis en présence des élèves, à peine une ardoise et un morceau de craie pour écrire sur cette ardoise ! L'enfant peut-il apprendre seulement en écoutant l'enseignant, le plus attentionné soit-il, et en écrivant selon quelques directives, les plus claires soient-elles ?

Le troisième fil conducteur que l'on peut envisager au primaire (et même au-delà) est l'expérimentation dans l'enseignement des mathématiques.

Le nombre est une abstraction qu'il faut éviter d'introduire explicitement d'entrée de jeu.

Pour l'enseignement de mathématiques des années du primaire et du collège, la démarche est non pas de partir des nombres naturels comme base de travail puis, au cours de la progression scolaire, de généraliser aux nombres entiers relatifs ensuite aux nombres rationnels et enfin aux réels mais plutôt de partir de "notions primitives" telles que des collections d'objets[4] que l'intuition de l'enfant appréhende sans difficultés tant que ces objets sont proches de sa réalité quotidienne. C'est l'étape du **nombre intuitif**

Concrètement, dans la première année du primaire et à fortiori dans le préscolaire, il s'agit non pas de comparer et d'additionner des nombres mais plutôt des objets qualitativement équivalents : on comparera plusieurs bâtons de craie, des bûchettes ou des billes de tailles différentes. Le principe fondamental serait, pour l'enfant, de *travailler* sur des objets pour développer son intuition, son habileté manuelle, sa capacité à dessiner et à imaginer : il

[4] Une collection d'images, un paquet de billes, l'ensemble des tables d'une classe, les ardoises des élèves sont autant d'occasions de donner sens à la notion de nombres en associant à une collection d'objets concrets et palpables un symbole : c'est le nombre "naïf ".

s'agit pour l'enfant *d'intégrer* ces objets dans son univers mental et qu'il puisse les *utiliser* aisément.

L'enjeu de l'expérimentation en tant qu'activité est que l'enfant se développe en travaillant des compétences de base.

Ce que nous voulons dire par là c'est que l'enjeu de l'expérimentation chez l'enfant n'est pas seulement un apprentissage mathématique (savoir additionner des grandeurs, diviser ou fractionner des grandeurs, comparer des volumes et des aires, etc.) mais aussi accompagner, voire initier, des processus de développement mentaux chez l'enfant. À ce propos Vygotsky écrit :

« *En anticipant quelques conclusions, nous pouvons affirmer que toutes les recherches expérimentales sur la nature des processus d'apprentissage de l'arithmétique, de l'écriture, des sciences naturelles et des autres matières à l'école élémentaire montrent que ces processus gravitent autour des nouvelles acquisitions de l'âge scolaire et donc autour des points cruciaux du développement de l'enfant de cet âge. L'enseignement scolaire lui-même réveille des processus internes déterminés de développement* ».

Et il rajoute un peu plus loin :

« *Montrer comment l'acquisition des quatre opérations arithmétiques produit toute une série de processus internes très complexes dans le développement de la pensée de l'enfant constitue la tâche essentielle de la pédologie pour l'analyse du processus pédagogique »*[5].

Il est donc illusoire de croire que l'enfant puisse se réduire à l'élève et que l'activité didactique en classe ne soit pas intimement liée au développement général de l'enfant.

Le choix de telles activités devrait par conséquent être au <u>centre des préoccupations épistémologiques et didactiques de l'enseignant.</u>

[5] Vygotsky, L.S., *Textes de base en psychologie*, sous la direction de B. Schneuwly et J.P. Bronckart, Delachaux & Niestlé S.A., Neuchâtel (Switzerland), Paris, 1985.

3. Au primaire, quelles compétences en mathématiques ? Maintenant, quelles sont ces compétences de base au primaire ? Avant d'aborder cette question des compétences, une autre question se pose : comment, pour l'enseignant, arriver à définir des compétences chez l'élève lorsqu'aucune transition pédagogique ne lui a été proposée pour passer de la définition d'objectifs de contenus à enseigner vers un modèle où une formation est absolument nécessaire pour opérer des choix dans la façon d'enseigner les fractions, les équations algébriques ou la géométrie ? Il n'est donc pas étonnant que la quasi majorité des enseignants occulte le travail sur la détermination des compétences ainsi que sur l'élaboration de situations-problèmes qui faciliteraient le développement de ces compétences.

a. Prenons un exemple, celui de l'enseignement des fractions en 4ième année primaire.

Voici ce qu'écrit N. Rouche dans son ouvrage : *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*

« *Les fractions ne sont que des notations et les mathématiciens du passé auraient pu en choisir de tout autres. L'essentiel n'est pas d'expliquer ces notations (par ailleurs commodes), mais bien les nombreux phénomènes qu'elles servent à exprimer, à commencer par les fractionnements de grandeurs, les manipulations de grandeurs fractionnées, les rapports, les proportions, les mesures* » [6].

Regardons de plus près la démarche de Rouche comme approche pour un enseignement des fractions car elle est très éclairante sur le type de démarche qui prend en compte cette nécessaire progression du concret vers l'abstrait, de la notion intuitive vers le concept.

Ainsi, on procèdera par étapes pour arriver à la notion de fraction.

---

[6] Rouche, N., *Pourquoi ont-ils inventé les fractions* ? Ellipses / édition marketing S.A., 1998.

1. Manipuler en coupant des objets en parts égales pour approcher le phénomène physique : 1/2, 1/3, 1/4, etc. d'une grandeur

- On coupe en plusieurs morceaux égaux divers objets sans en faire une distinction d'après la forme
- Ensuite, on coupe en parts égales des objets selon une grandeur déterminée : du point de vue de la longueur, de la surface, du volume, du nombre pour un ensemble fini de bûchettes, de jetons, de billes (on considère ici de la pâte à modeler, du fil, un volume d'eau, etc.)
- On divisera en 2 parts égales des objets géométriques à trois dimensions comme le cube.
- on coupe en deux puis en 4 parts égales des segments de droite (la grandeur est ici vue du point de vue de sa longueur)
- on coupe des carrés en 2 et en 4 carrés égaux, de même pour des rectangles, c'est l'aire en tant que grandeur qui est prise en considération.
- On divisera un triangle isocèle en deux triangles égaux.
- On divisera un angle en deux angles égaux et on observera les méthodes employées pour déterminer éventuellement les représentations des élèves sur la notion d'angle dans un triangle
- En tenant compte des symétries d'un cercle ou d'un disque (symétrie centrale et axiale), on divisera ces formes géométriques en 2, en 4, 8, 16 etc. parties égales et on observera la suite des nombres obtenus

Diviser en 3 parts égales un bâton, un carré, un angle n'est pas aussi aisé (surtout pour la trisection d'un angle) que la division en 2 parts égales, le théorème de Thalès n'étant pas près d'être vu et appliqué pour la division d'un segment en n parties égales. Seulement, à ce niveau on peut laisser l'imagination et l'intuition de l'élève agir pour éventuellement faire une approche empirique des propriétés du théorème de Thalès. On continue alors les partages d'un objet[7] en trois parts égales (un volume d'eau, un fil, un morceau de pâte à modeler, un segment de droite, une figure géométrique, un paquet de billes ou de jetons, etc.).

On notera à ce moment : ½ bâton de craie, ½ morceau de fil, ½ litre d'eau, etc.

Comme le précise N.Rouche : « *Chacune de ces expressions désigne une moitié d'une grandeur, et cette moitié est encore une grandeur. L'opération composée de couper en 2 parts égales et prélever une part est associée à l'écriture 1/2*»[8].

Ce symbole 1/2 est dit “ *fraction opérateur* ” et « *la fraction opérateur opère (agit) sur la grandeur.* » On fera de même pour les symboles 1/3, 1/4, 1/5, etc.

2. On passe des fractions du type 1/n à des fractions du type m/n, où m et n restent des nombres naturels petits compris entre 1 et 9.

Il s'agira alors de généraliser : on a d'abord introduit la fraction opérateur 1/2, 1/3, 1/4, etc. Comment généralise à 2/3, 4/5, etc.?

Pour appréhender un tel nombre, 2/3 pour fixer les idées, il s'agira de faire opérer la fraction opérateur 1/3 sur un objet (par exemple une bande rectangulaire, une tarte) et de procéder à la multiplication par 2. Concrètement, pour avoir les 2/3 d'une tarte, on divise en 3 parts égales cette tarte et on en prend 2 parts, d'où 2/3 de tarte. Là aussi on peut définir *la fraction-opérateur* 2/3 comme une opération composée d'une division en

[7] Ces objets que l'on partage ne doivent pas être exclusivement des objets continus. Partager en plusieurs parts égales un paquet de bûchettes, de jetons, de billes est une activité nécessaire qui contribue à cet apprentissage du partage et qui peut être source de questions, par exemple lorsque le partage en parts égales d'un nombre fini de jetons (pas trop grand quand même) ne tombe pas juste.

[8] Rouche, N., *Pourquoi ont-ils inventé les fractions* ? Ellipses / édition marketing S.A., 1998.

parts égales (ici en 3 parts égales) et d'une multiplication (ici d'une multiplication par 2 et cette composée sera lue : deux tiers). On pourra introduire à ce niveau la notion de numérateur et de dénominateur[9].

Dans cette démarche pour arriver aux fractions, il a fallu aller d'objets épars et divers aux objets dont la grandeur est bien déterminée comme la longueur ou l'aire et ensuite aux représentations dessinés de ces objets (un segment pour une longueur, un rectangle ou un carré pour une aire, etc.). Un saut qualitatif dans l'abstraction est franchi mais « *le lien à la réalité perçue n'est pas encore totalement rompu.* »

Ce lien sera définitivement rompu lorsque la fraction aura acquis un véritable statut de nombre dans l'esprit de l'élève.

3. Rapport de deux grandeurs, unité de commune mesure et fractions équivalentes

Ensuite, on peut envisager la notion de rapport de deux grandeurs: en prenant deux segments de longueurs différentes et en prenant aussi, pour plus de clarté, deux ensembles discrets (quelques points pour chacun d'entre eux) on définit empiriquement *le rapport* qu'il y a entre eux. Par exemple, si le segment s_1 est contenu deux fois dans le segment s_2, on dira que s_1 est à s_2 comme 1est à 2 ou que le rapport de s_1 à s_2 est de 1/2 : cette fraction exprime le rapport de la petite grandeur à la grande, on dit aussi que c'est une *fraction rapport.* Cette faction rapport peut, par exemple, exprimer une échelle : entre un arbre réel et l'arbre dessiné, l'échelle est de 1/50, autrement dit le dessin est 50 fois plus petit que l'objet dessiné.

D'exprimer le rapport de deux grandeurs (de deux longueurs par exemple) pose le problème de l'existence d'une *unité de*

[9] Dans son ouvrage, cité plus haut, Rouche pose le problème : “ Nous sommes 5 amis et voulons nous partager 3 tartes. Quelle portion de tarte chacun va-t-il recevoir ? ” Et il illustre le fait qu'il revient au même de partager une tarte en 5 et d'en prendre 3 parts ou de partager 3 tartes en 5 parts égales et d'en prendre l'une d'entre elles, ce qui s'écrit 3/5 de tarte.

commune mesure de ces deux grandeurs, c'est-à-dire de l'existence d'une grandeur (qu'on appellera alors unité) qui sera contenue un nombre entier de fois dans les deux grandeurs, ce nombre étant différent pour chaque grandeur dans le cas où ces deux grandeurs ne sont pas égales.

Prenons par exemple deux volumes d'eau V_1 et V_2 et un verre comme unité de mesure de capacité u et supposons que : $V_1 = 2$ u et $V_2 = 5$ u. Le rapport de V_1 à V_2 est de 2/5.

Cette notion d'unité de mesure donnera lieu à la notion de fractions équivalentes.

Pour répondre à la problématique de faire correspondre à une grandeur donnée un nombre, on introduira alors les unités de mesure conventionnelles comme le mètre, le kilogramme, le litre, etc. avec les sous-unités correspondantes.

4. Opérations sur les fractions

Par des problèmes appropriés on montrera l'utilité de savoir additionner, multiplier ou diviser des fractions entre elles : si on prend 1/4 de tartre et qu'on reprenne 2/4, quelle est la fraction qui exprimera la part de tarte prise ? Si on en prend 1/3 et qu'on en reprenne 2/5, quelle est la fraction qui exprimera la part de tarte prise ? Comment additionner ¼ d'heure, une ½ heure et ¾ d'heure ? Que signifie prendre le quart du tiers ? Etc.

Maintenant, si nous prenons le livre de l'élève, que constatons-nous au sujet des fractions ?

On constate que les manipulations sont pratiquement inexistantes et qu'il n'y a pas une diversification de contextes permettant d'approcher le phénomène de fraction. De plus, la leçon commence par une bande unité u qu'il s'agit de couper en 2 pour parler de ½ u. Que faut-il à ce moment comprendre sur cette unité parachutée ? Elle est imposée d'emblée sans vraiment que le lecteur en saisisse l'utilité à ce moment là. N'y a-t-il donc que des fractions de l'unité ? Ne peut-on pas parler du demi, du tiers ou du quart d'une grandeur quelconque ?

La leçon ne commence pas par ce qui peut parler à l'élève, c'est-à-dire par le concret familier de l'enfant. La nécessaire progression du concret vers l'abstrait, du plus simple vers le plus complexe, n'est pas plus prise en compte qu'une diversité de contextes pour exprimer une fraction.

Nous pensons que c'est là où se situe la dimension épistémologique de l'intervention de l'enseignant. À partir d'un squelette d'enseignement des fractions ou de quelques points de repère indiqués sur le livre de l'élève[10], il s'agira alors pour l'enseignant de construire une autre démarche qui mette en avant une activité plus soutenue de l'élève par le biais de manipulations sur des objets afin que les phénomènes que recouvrent les fractions soient plus visibles à l'élève.

4. Propositions de compétences au primaire

Revenons aux compétences que nous devons développer chez l'élève au primaire.

a. Citons celles qui sont d'abord susceptibles de développer la *perception des formes et des couleurs*[11].

➢ La compétence : comparer des grandeurs.

Il s'agit là de compétence qu'on peut ranger dans les compétences transversales, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas spécifiques à une discipline bien précise.

On peut citer dans cette compétence

- ranger des objets du plus petit au plus grand, du plus léger au plus lourd, ces objets pouvant être des bâtons de bois

[10] Les exercices proposés dans la première leçon sur les fractions (4ième année primaire, leçon 41) peuvent être utilement exploités car ils introduisent la notion de sous-unités, de fractions équivalentes et de fractions de grandeurs autres (disques et rectangles) que les étroites bandes rectangulaires.

[11] Il ne faut pas oublier que la géométrie est abordée dans l'enseignement des mathématiques au primaire, nombre de formes y sont dessinées comme des triangles, des cercles, des maisons en perspective, des quadrilatères, polygones, des figures possédants des axes de symétrie, des figures à 3 dimensions comme le cube, etc.

plus ou moins longs, des gobelets, des bouteilles, des récipients de différentes formes, des poids, de la pâte à modeler, etc.

- ranger des carrés de la plus petite aire jusqu'à la plus grande
- ranger des rectangles de la même façon que précédemment, en faisant éventuellement des superpositions de figures afin de décider de la plus grande et de la plus petite aire.
- Coloriage de dessins représentant un paysage ou des objets familiers afin de développer la perception des couleurs et des nuances.

b. Les compétences qui développent la capacité du dénombrement.

➢ <u>La compétence : écrire des nombres, les reconnaître, les ranger, compter les éléments d'une collection :</u>

- dans une première étape, *le nombre est associé* à une collection d'objets concrets et visibles à l'enfant comme une collection de billes de différentes couleurs, des dés de différentes tailles ou couleurs, etc. En d'autres termes, le nombre est le cardinal d'un ensemble d'objets-éléments de cet ensemble. Il en est ainsi d'ensemble ayant un nombre restreint (de 1 à 9) d'éléments (des crayons, des billes, des bûchettes, etc.) jusqu'à des ensembles tels que l'ensemble constitué par la classe ayant pour éléments les élèves eux-mêmes.
- Le nombre a non seulement aussi une fonction cardinale mais aussi une fonction ordinale : il indique le rang occupé par un élément dans une collection ou un ensemble ordonné fini.
- Dans l'étape suivante, les élèves doivent arriver à écrire des nombres en tant que tels et non en tant que résultat d'un dénombrement. L'enseignement doit donc essayer de dissocier le nombre (encore un petit entier naturel) de la collection d'objets dont il est le cardinal car il s'agit de procéder graduellement vers l'abstraction en partant des

nombres intuitifs qui représentent des objets et d'arriver à des nombres symboles, la *représentation figurative* devant peu à peu faire place à la *représentation symbolique*. Les situations-problèmes ne manquent pour procéder à cette transition. Nous pensons que c'est à ce prix que les premiers pas de la **conceptualisation** se feront.

« *La notion de nombre doit s'abstraire (s'écarter) de la nature des objets et de la façon dont ils sont disposés : il y a autant de chaises que d'élèves, le nombre de chaises est égal au nombre d'élèves. Le nombre n'est fait ni de chaises, ni d'élèves ; il ne change pas lorsqu'on dispose les chaises en cercle. On arrive à nommer le nombre en apprenant à compter. Une première abstraction consiste à remplacer les objets par des bâtonnets ou des points* » écrivent les auteurs de « *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* »[12] .

c. La compétence à associer deux nombres par une opération.

➢ La compétence : savoir additionner deux nombres

- Là aussi l'addition pour avoir du sens pour l'enfant ne peut être qu'une réunion d'éléments provenant de deux ensembles disjoints : il y a l'étape figurative de cette réunion que l'enseignant peut, dans une deuxième étape, symboliser ou formaliser grâce au signe +.

En réunissant deux collections d'objets de même nature (deux paquets de billes par exemple qui contiennent respectivement 6 et 3 billes chacune) on obtient un ensemble de billes qui contient (et là l'élève saura compter) les 9 billes qui résultent de cette réunion. Cette réunion, l'enseignant peut la traduire par le symbole conventionnel : 6 + 3.

- Le concept d'égalité peut alors être introduit : il n'est que le symbole qui exprime le *résultat d'une réunion* de deux collections

[12] CREM a.s.b.l. *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans,* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 rue Emile Vandervelde B-1400 Nivelles (Belgique), 1995.

d'objets qui n'ont pas d'éléments communs: 6 + 3 = 9. Tout cela pouvant être aisément figuré ou expérimenté sur des objets.

Ce qu'il y a lieu de faire alors c'est de varier les contextes afin que le schéma additif puisse opérer dans différentes situations. Les situations-problèmes pour introduire les opérations arithmétiques en lien étroit avec la réalité de l'enfant ne manquent pas.

5. Représentations erronées et situations-problèmes. Le passage des nombres naturels aux nombres rationnels positifs engendre souvent des représentations erronées.

Ainsi, si le produit de deux nombres naturels est toujours supérieur ou égal à chacun de ces deux nombres, il n'en est pas de même si les nombres considérés sont des fractions.

De même, lorsqu'on divise un nombre par 2, obtient-on un nombre plus grand ou plus petit que le nombre que l'on divise ? C'est là l'occasion de relancer le débat sur la multiplication (la multiplication est-elle une opération qui agrandit ?) et la division (est-elle toujours une opération qui diminue ?) de nombres qui ne sont pas nécessairement des nombres naturels.

La situation-problème n'est pas uniquement une situation où l'on apprend une certaine connaissance (une connaissance mathématique précise découlant d'un théorème par exemple) grâce à un dispositif particulier. Elle peut aussi avoir pour rôle de mettre à jour des représentations erronées et de les dépasser. Dans les discussions que nous avons eues avec des enseignants du primaire et du collège, nous nous sommes aperçus de cette non exploitation de la situation-problème.

6. L'enseignement de la géométrie au collège, compétences et situations-problèmes

a. Considérations épistémologiques : Au collège, l'enseignement de la géométrie y est non seulement plus systématique mais il y a aussi l'introduction de l'algèbre par le biais de formules plus ou moins abstraites et d'équations algébriques. Comment, en géométrie, traduire ce souci du sens que nous avons pris comme fil conducteur dans cet enseignement des mathématiques ?

Les questions qui se posent donc sont : qu'est ce que la géométrie et comment l'enseigner au niveau le plus élémentaire ?

Nous n'allons pas nous attarder sur la géométrie comme système logique qui fonctionnerait avec comme point de départ un certain nombre d'axiomes à partir desquels on déduirait logiquement tout le reste. Ce qui nous intéresse ici c'est la géométrie au primaire et au collège. À cette question : qu'est ce que la géométrie au niveau le plus élémentaire, la réponse de Freudenthal est nette : "*La géométrie est l'appréhension de l'espace. Et puisqu'il s'agit de l'éducation des enfants, c'est l'appréhension de cet espace dans lequel l'enfant vit, respire et se déplace*"[13].

La géométrie sera donc l'étude de situations spatiales dans l'espace physique à travers les objets les plus divers comme les droites, les segments de droite, les angles, les figures dites géométriques du plan et de l'espace comme les triangles, les quadrilatères, les polygones, les polyèdres, etc. Précisons qu'il s'agit là d'une géométrie intuitive et concrète dans la mesure où ces objets cités plus haut sont (et doivent être sans doute) fabriqués par la main même de l'élève. Ainsi en sera-t-il des triangles et autres carrés, rectangles, parallélogrammes, cubes, parallélépipèdes, etc. dont on cherchera les propriétés et qu'on apprendra en outre à représenter par le dessin[14].

L'enseignement de cette géométrie ne peut alors avoir de base autre qu'une base empirique dans la mesure où c'est le dessin, plus ou moins précis, à l'aide d'instruments comme la règle, le compas, l'équerre et le rapporteur, qui va constituer le matériau de l'activité de l'élève. Cette activité est porteuse de sens car pour

[13] Freudenthal, H., *Le cas de la géométrie*, Extrait de *Mathematics as an Educational Task* de Hans Freudenthal, Reidel, Dordrecht, 1973, pp. 401-462. Traduction de Monique Parker, UREM, Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Les cahiers du CeDoP, ULB.

[14] Ce problème concernera surtout les objets à trois dimensions (cube, parallélépipède, etc.) qu'on voudra représenter sur le plan de la feuille.

s'approprier l'espace physique, l'élève doit s'approprier, par l'expérience sensible, ces formes (dans l'espace et le plan) faites de droites obliques, parallèles, perpendiculaires, de cercle, de plans orthogonaux, de plans parallèles, de surfaces comme le cylindre, la sphère, le cône, etc.

Cependant, si cette géométrie et son apprentissage possèdent un caractère inévitablement empirique, il n'en reste pas moins que cet enseignement doit se placer dans la perspective du développement d'une activité rationnelle chez l'élève. Comme l'activité démonstrative en mathématique est un excellent moyen de construire cette rationalité, il se dégage ce troisième fil conducteur dans cet enseignement des mathématiques : le développement du raisonnement déductif, ce qui d'ailleurs constitue une compétence fondamentale en mathématiques. Réfléchir sur des figures afin d'en tirer, au moyen du raisonnement, des conclusions non évidentes a priori est une compétence que l'enseignement doit poursuivre tout au long de la scolarité de l'élève pour peu que le parcours scolaire de l'élève comporte des éléments de géométrie. Notons enfin que cette compétence de l'exercice d'une rationalité à travers le discours démonstratif doit s'accompagner d'un effort de rigueur adapté à chaque niveau de la scolarité.

b. Quelles compétences en géométrie ? La compétence fondamentale à poursuivre est celle de **l'initiation au raisonnement déductif et à la démonstration à travers le cycle moyen.**

Cette compétence très large ou macro compétence peut et doit être sous-tendue par d'autres compétences relatives à des situations dans l'espace et dans le plan, dont :

- La compétence à représenter par le dessin plan des surfaces telles que les sphères, les cubes, les cylindres, les cônes, etc.
- La compétence à observer et à décrire une figure

- La compétence à décoder une figure géométrique en identifiant les données
- La compétence à énumérer les étapes d'un programme de construction de figures
- La compétence à reconnaître et construire les figures géométriques les plus diverses (dans le plan et l'espace) et à les classer
- La compétence à tirer des conséquences immédiates ou non immédiates, à partir de faits géométriques observés dans une figure
- La compétence à distinguer soigneusement les hypothèses de la conclusion ou de ce qui est demandé à l'élève (hypothèses explicites et implicites).

Les situations-problèmes en géométrie auront essentiellement pour objectifs de

- Faire manipuler (faire à la main) et de faire construire des figures afin que l'élève appréhende les formes du plan et de l'espace
- Montrer à l'élève qu'un dessin ne constitue pas une preuve
- Mettre la classe dans une situation de doute et de désaccord afin de faire apparaître la nécessité de la preuve
- Susciter la production de conjectures pour répondre à une question posée

Exemple : situation-problème sur les pavages du plan par des triangles ou quadrilatères.

Toutes ces considérations montrent amplement les difficultés épistémologiques et didactiques qui attendent l'enseignement/apprentissage de la géométrie au collège et ceci quelle que soit la réforme envisagée car les questions invariables sont : quels savoirs enseigner et comment les enseigner ?

3. Conclusion

Telle que présentée ici, l'approche par compétence n'est pas appliquée dans nos établissements. Les causes sont multiples. La première est d'ordre méthodologique : il y a certaines conditions à respecter dans la façon de traduire et d'appliquer ou de faire appliquer une réforme dans le système éducatif. Les enseignants n'ont été associés ni à un bilan plus ou moins exhaustif de l'ancien système ni à des discussions sur de nouvelles propositions de changement à partir desquelles la communauté enseignante dégagerait éventuellement des recommandations et des résolutions pour entamer un nouveau chantier pour une réforme à évaluer périodiquement. Cette marginalisation de la communauté enseignante dans la mise en œuvre de l'approche par compétence dans ses dimensions conceptuelles et méthodologiques a conduit à une démobilisation de ceux qui ont la charge d'appliquer cette réforme.

La deuxième serait d'ordre socioprofessionnelle : les habitudes de travail prises par les enseignants dans le cadre de l'ancien système, la difficulté de leur métier dans des classes pléthoriques, le peu de considération à leurs égards de la part des pouvoirs publics qui se traduit notamment par une dégradation continue de leurs conditions de vie et de travail, tout cela ne concourent pas à susciter leur intérêt et leur mobilisation autour de cette réforme.

La troisième relèverait de la formation scientifique de l'enseignant. Qu'en est-il de la formation des enseignants au sujet de cette réforme, de ses fondements épistémologique, psychologique, didactique, de ses attendus, de l'explicitation d'une nouvelle pédagogie, de la nécessité d'innovations, de la nécessité d'adapter une nouvelle forme d'évaluation des compétences ? Etc. Pour ce que l'on a observé, la question se pose : y a-t-il eu de la part de la tutelle une mise en place d'une réelle politique de formation et d'information à destination des enseignants chargés d'appliquer cette réforme ? Nos contacts et discussions avec les enseignants et chefs d'établissement ont montré que s'il y a eu quelques stages de formation pour des inspecteurs, il n'y a pas eu par contre d'impact sur les enseignants confrontés chaque jour aux réalités de la classe et de sa gestion pédagogique. C'est pourquoi, on constate largement aujourd'hui une réelle difficulté chez les enseignants, en mathématiques en particulier, à pouvoir définir une compétence et encore plus à élaborer une situation-problème.

Il n'est évidemment pas trop tard pour penser et mettre en application une formation initiale et continue en faveur des enseignants, encore faut-il y associer les motivations nécessaires à préciser avec les concernés afin d'enclencher chez eux une dynamique de recherche des sources des obstacles à l'apprentissage et des moyens à mettre en œuvre pour surmonter ces obstacles.

4. Bibliographie

Rouche, N., *Pourquoi ont-ils inventé les fractions* ? Ellipses / édition marketing S.A., 1998.

Freudenthal, H., *Le cas de la géométrie*, Extrait de *Mathematics as an Educational Task* de Hans Freudenthal, Reidel, Dordrecht, 1973, pp. 401-462. Traduction de Monique Parker, UREM, Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Les cahiers du CeDoP, ULB.

Vygotsky, L.S., *Textes de base en psychologie*, sous la direction de B. Schneuwly et J.P. Bronckart, Delachaux & Niestlé S.A., Neuchâtel (Switzerland), Paris, 1985.

CREM a.s.b.l. *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans,* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 rue Emile Vandervelde B-1400, Nivelles (Belgique), 1995.