Les cahiers du CRASC n° 39, 2022, p. 169-188

La trigonométrie au service de la géographie arabe

Faïza REMAOUN-DJABEUR (1,2)

Introduction

La géographie dans la civilisation arabo-musulmane englobe à la fois le vaste domaine de la « géographie humaine » et celui de la « géographie mathématique » qui est le sujet de notre étude. L'héritage scientifique reçu des civilisations anciennes, et en premier lieu la géographie grecque, va influencer les savants des pays d'islam pour établir les fondements scientifiques de la géographie mathématique, dont les outils de base sont la géométrie sphérique et la trigonométrie.

Le mot « trigonométrie » qui signifie, en grec, « mesure du triangle », n'a pas eu d'équivalent dans le corpus géométrique arabe des IXe-XVe siècle, malgré le développement important de ce chapitre en relation avec les progrès de l'astronomie en pays d'islam. Ce nom apparaît, pour la première fois, en 1595, dans l'ouvrage de Pitiscus (Youschkevitch, 1976, p. 132).

Dans l'Encyclopédie (1751), d'Alembert (m. 1783) définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît » (D'Alembert, 1789, p. 144). C'est bien la démarche qui est demandée aux élèves du collège. Mais, historiquement, la genèse de cette discipline est plus complexe. Les premiers éléments de trigonométrie que connaîtront les astronomes arabes du IXe siècle, à travers les traductions, proviennent de deux

(1) Maître assistant A, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran - Mohamed-Boudiaf, 31 000, Oran, Algérie.
(2) Centre de Recherche en Anthropologie Sociale et Culturelle, 31 000, Oran, Algérie.

sources. La première est indienne et la seconde est grecque. Ces deux notions apparaissent comme éléments du cercle puis ils deviendront des éléments incontournables de la géométrie sphérique.

L'Historique de la naissance et de développement des éléments constitutifs de la trigonométrie antique et médiévale

Sinus et cordes [figure 1]

Le sinus prend sa source dans le cercle et par l'intermédiaire de la notion de corde. Le calcul des cordes est apparu dans des problèmes d'astronomie et dans l'étude de modèles géométrique de l'univers.

Dans un cercle de centre O, considérons un angle au centre $\widehat{AOD}$. Du point A, abaissons une perpendiculaire sur le côté OD. On appelle sinus $\widehat{AOD}$ le rapport de la droite AC au rayon OA. Si nous prenons OA=1, ce rapport deviendra égal à la longueur de AC elle-même.

La table de sinus est une liste de toutes les valeurs que peut prendre la longueur AC dans un cercle de rayon 1.

Du point D, élevons une perpendiculaire DE sur le rayon OD, et prolongeons le rayon OA jusqu'en E. on appelle tangente $\widehat{AOD}$ le rapport de la droite DE au rayon OD. De nouveau en prenant OD=1, ce rapport devient égal à la longueur de la droite DE elle-même. La table de tangente est une liste de toutes les valeurs que peut prendre DE dans un cercle de rayon 1.

Considérons maintenant l'angle AOB et joignons AB. On peut appeler corde $\widehat{AOB}$ le rapport de la droite AB au rayon OA. Si l'on prend OA=1 ce rapport devient égal à la longueur de la droite AB elle-même. La table de corde est une liste de toutes les valeurs que peut prendre AB dans un cercle de rayon 1. Ces tables étant écrites à l'aide de la numération sexagésimale[1], le rayon 1 est représenté par 60 parties dont chacune vaut 60 minutes de 60 secondes chacune.

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques (Sidersky, 1923, pp. 108-110).

[1] Numération sexagésimale : système de numération de base 60 d'origine babylonienne, que nous avons encore dans notre notation des heures, minutes et secondes.

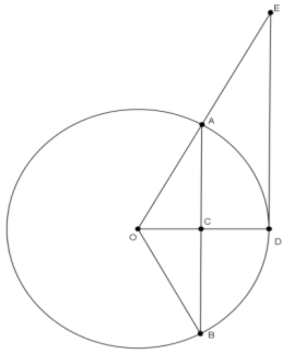

Figure 1 : Sinus, tangente et corde

Source : GeoGebra.

Trigonométrie grecque

Dans la tradition astronomique grecque, les éléments de trigonométrie comprennent certains éléments du triangle plan et du triangle sphérique[2].

L'une des tâches de l'astronomie fût alors l'établissement de tables permettant le passage de la mesure des angles à celle des arcs et des cordes. Les premières **tables des cordes**, celles du mathématicien grec Hipparque de Nicée (190-120 av. J.-C.) (Gillispie, 1981, vol. 6, p. 405), ont été perdues. On s'accorde à voir en elles les premiers éléments de la trigonométrie.

Poursuivant les recherches des astronomes Babyloniens, il introduit la division du cercle en 360° et, grâce à un immense travail d'observations des astres, il établit ces premières tables. Il critique la géographie d'Ératosthène[3] (Gillispie, 1981, vol. 4, pp. 388-393) et tente de fixer astronomiquement les positions des lieux sur le globe terrestre par leurs latitudes et longitudes, ces dernières étant déterminées par l'observation des éclipses.

---

[2] Triangle sphérique : triangle tracé sur la sphère dont les côtés sont des arcs de grands cercles.

[3] Ératosthène : astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec du III[e] siècle av. J.C. il calcula la circonférence de la terre.

Trois siècles plus tard, le grand astronome Ptolémée (90-168) (Gillispie, 1981, vol. 11, pp. 186-205) expose dans son ouvrage « L'Almageste » toute la trigonométrie de l'antiquité grecque. Il explique comment calculer des longueurs de cordes et publie une table très complète allant de ½° à 180° par pas de ½°. Il réalise également des tables qui établissaient le passage entre les longueurs des cordes et celles des valeurs d'arcs. C'est à dire ici, entre l'angle θ et la longueur AB de la corde [AB]. Plus précisément, pour un cercle de rayon 1 = AO = OB, on a AB = 2 sin θ/2. Il établit également un théorème qui porte son nom, qui concerne le quadrilatère inscrit dans un cercle, et qui fournit une formule équivalente à celle qui donne $\sin(a \pm b)$. Dans l'Almageste, on trouve aussi l'usage du théorème de Menélaüs qui est l'outil principal de la trigonométrie sphérique de l'époque.

Ce théorème, qui est le premier du Livre III de son ouvrage intitulé « Les Sphériques », sera connu, chez les astronomes des pays d'islam, sous le nom de « al-shakl al-qaṭṭāᶜ » [la figure sécante] précise les relations existantes entre des longueurs découpées dans un triangle sphérique par une sécante. Dans la géométrie euclidienne, on trouve le résultat suivant :

Si l'une des deux droites concourantes oblique est coupée orthogonalement par des droites arbitraires, alors le rapport des segments des droites découpés sur les droites concourantes est un rapport invariant.

Le théorème de Ménélaüs est le résultat de géométrie plane suivant qui en découle :

Théorème de Menélaüs plan [figure 2] (Ptolémée, 1813, t. 1, pp. 50-51)

$$\frac{GA}{AE} = \frac{GD}{DZ}\left(\frac{ZB}{BE}\right)$$

Soit $EH \parallel GD \Rightarrow \frac{GA}{AE} = \frac{GD}{EH}$

Or : $\frac{GD}{EH} = \frac{GD}{DZ}\left(\frac{DZ}{EH}\right) \Rightarrow \frac{GA}{AE} = \frac{GD}{DZ}\left(\frac{DZ}{EH}\right)$

Mais : $\frac{DZ}{EH} = \frac{ZB}{BE}$ car $EH \parallel ZD$

$$\Rightarrow \frac{GA}{AE} = \frac{GD}{DZ}\left(\frac{ZB}{BE}\right)$$

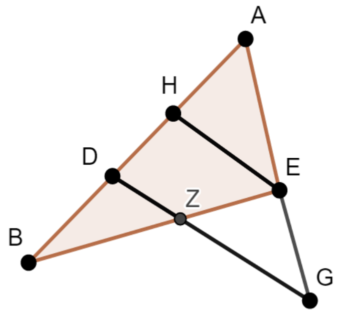

Figure 2 : Théorème de Ménélaüs plan

Source : GeoGebra.

Cette version de Ptolémée utilise la notion de « *composition de rapport* ». Voici une version plus moderne du théorème, qui elle, utilise la notion de « produit de fraction » :

Considérant un triangle quelconque *ABC*, il appelle « transversale » toute droite qui coupe les trois côtés du triangle, à condition de considérer ces côtés non pas comme les segments [*AB*], [*BC*] et [*AC*] mais comme les droites définies respectivement par les points *A* et *B*, *B* et *C* ainsi que *A* et *C* (ce qui revient à considérer les prolongements des segments). Soit alors les points *A'*(ou la transversale rencontre la droite (*BC*)), *B'* (sur la droite (*AC*)) et *C'* sur la droite (*AB*)). En abaissant des points *A*, *B* et *C* les perpendiculaires (*a*, *b* et *c*) sur la transversale, Ménélaüs constate qu'il obtient des triangles semblables, ce qui lui permet d'écrire :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{b}{a}, \frac{B'C}{AB'} = \frac{a}{c}, \frac{AC'}{BC'} = \frac{c}{b}.$$

En multipliant membre à membre ces trois égalités, il obtient :

$$\left(\frac{A'B}{A'C}\right).\left(\frac{B'C}{AB'}\right).\left(\frac{AC'}{BC'}\right)=\left(\frac{b}{a}\right).\left(\frac{a}{c}\right).\left(\frac{c}{b}\right)=\frac{a.b.c}{a.b.c}=1$$

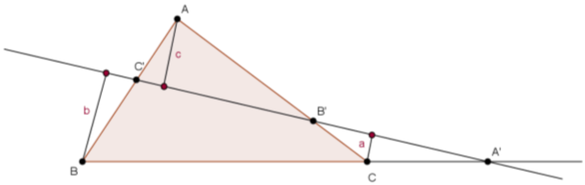

Figure 3 : Théorème de Ménélaüs sphérique

Source : GeoGebra.

Sur une sphère donnée de centre *O*, soit des arcs de grands cercles, inférieurs à des demi-cercles. Soit *Q*, l'intersection de [voir $\widehat{PR},\widehat{AC}$ figure 4].

Alors : $\frac{corde(2\widehat{AR})}{corde(2\widehat{RB})}=\frac{corde(2\widehat{AQ})}{corde(2\widehat{QC})}(\frac{corde(2\widehat{CP})}{corde(2\widehat{PB})})$

On joint *OP*, *OQ*, *OR*. On prolonge *BC* et *OP* qui se coupent en *D*. On trace *AC* qui coupe *OQ* en *E*, et *BA* qui coupe *OR* en *F*. Alors *D*, *E*, *F* sont sur une même droite car ils sont à la fois dans les plans (*BAC*) et (*PQR*).

Donc *DF* et *AC* se coupent en *E* [puisque *AC* appartient aussi à la fois à (*BAC*) et (*PQR*), donc sur leur intersection *DEF*.

Donc $\frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC}(\frac{CD}{DB})$

Mais $\frac{AF}{FB}=\frac{corde(2\widehat{AR})}{corde(2\widehat{BR})}$, $\frac{AE}{CE}=\frac{corde(2\widehat{AQ})}{corde(2\widehat{CQ})}$, $\frac{CD}{DB}=\frac{corde(2\widehat{CP})}{corde(2\widehat{PB})}$

(Ptolémée, 1813, pp. 51-54].

Donc : $\frac{corde(2\widehat{AR})}{corde(2\widehat{RB})}=\frac{corde(2\widehat{AQ})}{corde(2\widehat{QC})}(\frac{corde(2\widehat{CP})}{corde(2\widehat{PB})})$

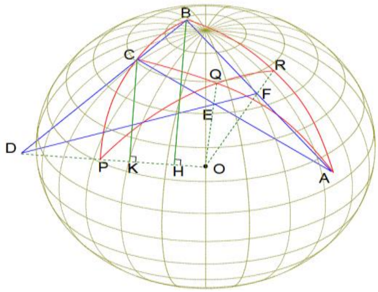

Figure 4 : Théorème de Ménélaüs sphérique

Source : Histoire de sphères, IREM Aix-Marseille Université.

Trigonométrie indienne

Tout comme chez les Grecs, la trigonométrie chez les Indiens était rattachée à l'astronomie. En 499, le mathématicien Āryabhaṭa I, a eu l'idée de considérer la demi-corde de l'angle double plutôt que la corde de l'angle. Les indiens ont ainsi remplacé les tables des cordes par celles des sinus. Le nom indien donné à la demi-corde de l'angle double [jivā ardha ou jibā ardha = corde-demi] deviendra notre sinus après avoir été transcrit en arabe « *jīb* » (qui signifie « poche ») ce qui donnera « *sinus* » en latin. Âryabhata utilise jyvā pour sinus[4] (Parmeshwar, 1988, pp. 253-259).

Les indiens ont introduit et couramment utilisé ces trois « fonctions » trogonométriques, il s'agit en fait de « fonctions » d'un arc de cercle de rayon donné, et non de fonctions d'un angle (figure 5) : si *EA* est un arc de cercle de centre *O* et de longueur *a* inférieur au quart de la ciconférence, et si *H* est le projeté orthogonal de *A* sur (*OE*), alors :

Jyvā(a) =AH, et *utkramajivā(a) =HE=OE-OH.*

En notant θ une mesure de $(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OA})$ et R le rayon du cercle, on a ainsi :

Jyvā(a)=Rsin(θ), et *utkramajivā(a) = R- R cos(θ)*

[4] sinus verse$\theta = R[1\text{-}\cos\theta]$.

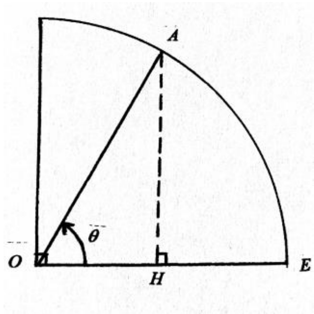

Figure 5 : Sinus et sinus verse

Source : Pouvreau D., Trigonométrie et développement en série en Inde médiévale, IREM de Toulouse, 2003.

La trigonométrie arabe

La période arabe de la trigonométrie sera celle des premières formules du triangle, des premières définitions et de l'introduction de la fonction tangente ; ce sera l'époque ou la trigonométrie prendra forme, progressivement, en se distinguant de la géométrie, cela dit, l'exemple de l'encyclopédiste et mathématicien Ibn al-Akfānī (m.1348), (Djebbar, 2004, p. 416) nous montre qu'elle ne sera pas considérée par les bibliographes comme une science autonome. Ce dernier la présente en tant que branche de l'astronomie, comprenant quatre « sciences » qui sont des domaines d'application de la trigonométrie, à savoir :

1- La science des tables astronomiques [ᶜilm al-zayjāt wa l-taqāwīm]

2- La science du temps [ᶜilm al-mawāqīt].

3- La science de la projection de la sphère [ᶜIlm tasṭīḥ al-kura]

4- La science des gnomons (cadrans solaires) [ᶜIlm al-'ālāt al-ẓilliya].

Malgré la richesse du domaine de la trigonométrie arabe, les scientifiques et les bibliographes des pays d'Islam ne donneront pas de nom à cette nouvelle discipline. Il faudra attendre les manuels et les dictionnaires relativement modernes pour qu'on lui donne un nom, celui de ᶜilm ḥisāb al-muṭhallathāt [science du calcul des (éléments des) triangles].

La trigonométrie se développe en relation avec l'astronomie, l'astrologie et la géographie pour des raisons de calculs liés à la religion (calendrier lunaire, prière…), mais aussi suite à des commandes de l'Etat. Elle est intervenue, à la fois dans des domaines théoriques (pour élaborer de nouveaux outils mathématiques) et dans des domaines appliqués, comme l'astronomie (calcul d'un degré de méridien, de l'obliquité de l'écliptique), la géographie (calcul des latitudes et des longitudes des différentes villes de l'empire musulman), et le vaste domaine des pratiques religieuses (détermination de la direction de la Mecque, des moments des prières et de la visibilité du croissant de lune).

Les premiers pas de la trigonométrie arabe

La trigonométrie arabe se nourrira d'un double héritage, grec et indien.

À la tradition indienne, les Arabes emprunteront le sinus et le sinus verse.

La première phase de l'astronomie et de la trigonométrie serait peut-être indienne. En effet les bibliographes arabes évoquent l'arrivée à Bagdad, vers 773, d'une délégation indienne qui offre au calife al-Manṣūr (754-775) qui offre à ce dernier un livre de la catégorie des « siddhanta ». Ce livre sera traduit en arabe par Muḥammad al-Fazārī.

Voici ce qu'on peut lire à propos de ce livre indien, dans l'ouvrage bibliographique d'Ibn al-Qifṭī (m. 1288), « *Kitāb ikhbār al-ḥukamā' bi akhbār al-ᶜulamā'* » [Le livre qui informe les sages sur la vie des savants] :

> « En l'année 156 de l'hégire [773 ap. J.-C.] il arriva de l'Inde à Baghdād un homme fort instruit dans les doctrines de son pays. Cet homme possédait la méthode du Sindhind [Siddhanta], relative aux mouvements des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart en quart de degré. Il connaissait aussi diverses manières de déterminer les éclipses, ainsi que le lever des signes du

> zodiaque. Il avait composé un abrégé d'un ouvrage relatif à ces matières, qu'on attribuait à un prince nommé Figar. Dans cet écrit, les Kardaga[5] étaient calculées par minutes. Le calife ordonne qu'on traduise le traité indien en arabe, afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. Le soin de la traduction fut confié à Muḥammad, fils d'Ibrāhīm al-Fazārī, le premier d'entre les musulmans qui s'était livré à une étude approfondie de l'astronomie : on désigna plus tard cette traduction, chez les astronomes, sous le titre de Grand Sindhind ».

C'est cependant la géométrie sphérique de la « tradition grecque » qui sera à la base du développement de la trigonométrie arabe et ce à travers quatre ouvrages : « Les Sphériques » de Théodose (II^e s.) », « La sphère mobile » d'Autolykos (III^e s.) et surtout « *Les Sphériques* » de Ménélaüs (II^e s.), traduit en arabe par Isḥāq Ibn Ḥunayn (m. 910).

Voici la version arabe du théorème de Ménélaüs, elle contient la notion du sinus et le nom de sinus emprunté à la trigonométrie indienne :

Théorème de Ménélaüs sphérique ou formule de la figure sécante

Si *PB, AB, PR et AC* sont des arcs de grands cercles [6]d'une sphère, on a :

$$\frac{\sin RA}{\sin RB} = \frac{\sin PC}{\sin PB} \times \frac{\sin QA}{\sin QC} \text{ (figure 6)}$$

[5] Il s'agit vraisemblablement des lignes des sinus.

[6] On appelle grand cercle d'une sphère tout cercle obtenu en coupant cette sphère par un plan passant par son centre. Ainsi, l'équateur et les méridiens de la Terre sont des grands cercles. En revanche, les tropiques ou les cercles polaires ne le sont pas.

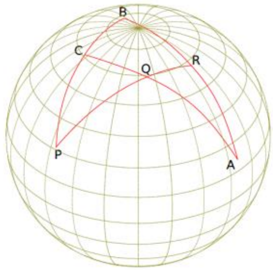

Figure 6 : La figure sécante

Source : Histoire de sphères, IREM Aix-Marseille Université

Les nouveaux outils de la trigonométrie

La visibilité du croissant de lune a une grande importance pour les musulmans, notamment pour déterminer le début et la fin de ramadhan. Sa solution scientifique fait intervenir quatre paramètres : La différence de longitude entre le soleil et la lune, la latitude de la lune, la latitude du lieu et la situation météorologique du moment qui conditionne la luminosité du soleil

Si $\beta = LN, \lambda_m = VN, \lambda_s = VS,\ \phi$ la latitude du lieu, $\mu = \cot(\phi)$, $\rho(\lambda)$ l'ascension droite de λ, on calcule $\lambda'_m = \lambda_m + \mu$, et si on note :

$\sigma(\lambda) = \rho(l + 180^\circ) - 180^\circ$, Alors la différence $\sigma(\lambda'_m) - \sigma(\lambda_m)$ est la condition de visibilité du croissant de lune [Djebbar 2004, p. 421].

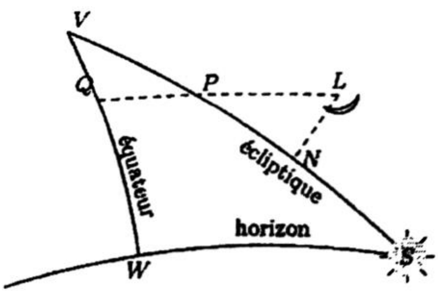

Figure 7 : Visibilité du croissant de lune

Source : Djebbar A., Trigonométrie arabe, p. 421.

La détermination des moments des prières utilise les notions de tangente et de cotangente et qui n'étaient à l'origine que l'ombre d'un gnomon planté sur un plan vertical (pour la première), ou horizontal (pour la deuxième), et qui n'avaient donc aucun lien avec le cercle. Prenons la hauteur h du gnomon pour grandeur fixe, le rapport de l'ombre *t* de la tige à sa longueur h varie en fonction de la hauteur α du soleil. Ḥabash al Ḥāsib (m. vers 874) pose h = 60' = 1 et calcule une table des valeurs de l'ombre t, c'est-à-dire $cot\alpha$, pour différentes valeurs de α. Cette table permet de déterminer la hauteur du soleil à partir de la longueur de l'ombre et inversement la longueur de l'ombre à partir de la hauteur du soleil.

$t = h\cot\alpha = \cot\alpha$

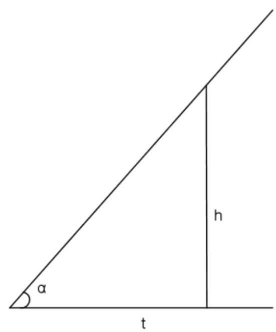

Figure 8 : L'ombre d'un gnomon

Source : GeoGebra.

Dans le cas d'un gnomon horizontal fixé perpendiculairement à un mur vertical, Ḥabash dresse une table des « ombres inverses » [= *al-ẓ-ill al-ma*[c]*kūs*], c'est-à-dire des valeurs de la tangente [Youschkevitch 1976, p. 146].

$t = \mathrm{h}\tan\alpha = \tan\alpha$

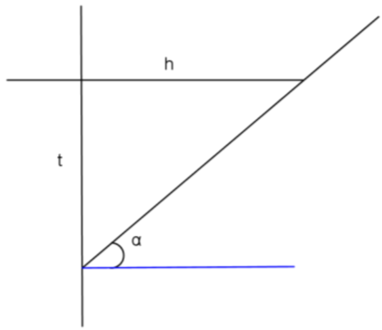

Figure 9 : L’ombre inverse d’un gnomon

Source : GeoGebra.

Dans le cinquième chapitre du Livre I de son important ouvrage, intitulé « Iṣlāḥ al-Majisṭī » (Révision de l’Almageste), le mathématicien et astronome de Bagdad, Abū l-Wafā’ al-Buzjānī (m. 997) traite des sinus et des cordes. Il y établit les premières relations trigonométrique telle que celle donnant sin$(a \pm b)$ et les principales relations entre les lignes trigonométriques. Le sixième chapitre est consacré aux ombres, Abū l-Wafā’ définit géométriquement l’ombre d’un arc, qu’il nomme aussi son ombre première ou son ombre verse, en l’identifiant à l’ombre verse d’un gnomon horizontal confondu avec un rayon du cercle de référence ($\text{tg}\, BZ = \ ombre\ de\ BE$) (figure 9). La même figure lui sert à introduire l’ombre seconde de l’arc considéré ($\cot BZ = AY, ombre\ de\ AE$) et à établir toutes les relations élémentaires entre tangente, cotangente, sinus et sinus du complément (Debarnot 1997, p. 180). Il établit également le théorème du sinus pour les angles sphériques.

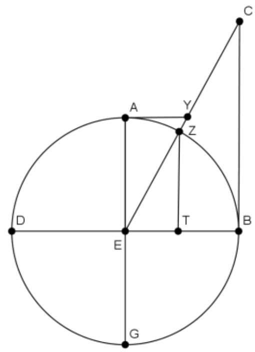

Figure 10 : Tangente et cotangente

Source : GeoGebra.

Le mathématicien du Caire Ibn Yūnus (m.1009), a aussi apporté une contribution importante à la trigonométrie. Il résout de nombreux problèmes d'astronomie sphérique, au moyen de projections orthogonales, et introduit certaines formules indispensables avant l'invention des logarithmes, telle que, par exemple, l'équivalent de $\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

Quelques applications de la trigonométrie

Détermination de la Qibla

Les astronomes des pays d'islam ont développé des méthodes pour calculer la qibla en tout lieu à partir des données géographiques disponibles, en traitant la détermination de la qibla comme un problème de géographie mathématique, mais les méthodes mathématiques ne furent accessibles qu'au début du IX^{e} siècle, grâce à des astronomes comme Ḥabash al-Ḥāsib qui en établira la formule trigonométrique exacte.

Méthode géométrique

Voici la procédure géométrique que l'on doit à l'astronome Ḥabash al-Ḥāsib :

Sur un cercle de centre O, marquons les directions cardinales $NESW$et marquons ensuite les arcs $WQ = \emptyset, QB = \emptyset_M$ et $QT = \Delta L$. Traçons le diamètre QOR et la corde parallèle à lui, ayant pour milieu le point$G$. Marquons sur OT le point M_2 tel que $OM_2 = GC$, et traçons la perpendiculaire M_2M_1 sur BC. Traçons ensuite M_1L parallèle à WE et M_1IJ parallèle à SN, en coupant WE en I et le cercle en J. Enfin plaçons sur M_1L le point M_3 tel que $OM_3 = IJ$ et prolongeons OM_3qui coupe le cercle en K. Alors OK définit la qibla (King 1997, pp. 186-187).

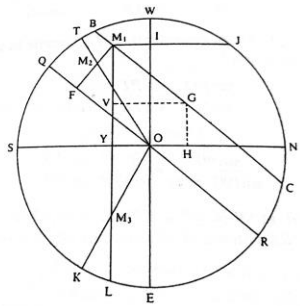

Figure 11 : Direction de la Qibla

Source : David King : Astronomie et société musulmane, p.187 (Histoire des sciences arabes, Roshdi Rashed).

Procédé trigonométrique

Un second procédé, établi par al-Nayrīzī, permettra de résoudre ce problème en utilisant le théorème de Ménélaüs : [figure 11]

Nous calculerons successivement les arcs *TR, SR, Z_MK et KS*.

Cherchons d'abord *TR* : Considérons SRE comme la sécante du triangle *TPQ*. Nous avons :

$\frac{\sin PS}{\sin SQ} = \frac{\sin PR}{\sin RT}\ \frac{\sin TE}{\sin EQ}$, c'est-à-dire : $\frac{\sin(180^\circ - \emptyset)}{\sin(90^\circ - \emptyset)} = \frac{\sin(90^\circ + TR)}{\sin TR}\ \frac{\sin(90^\circ - \Delta L)}{\sin 90^\circ}$.

Cherchons maintenant *SR* : considérons *QTE* comme la sécante du triangle *RSP*. Nous avons :

$\frac{\sin PQ}{\sin QS} = \frac{\sin PT}{\sin TR}\ \frac{\sin ER}{\sin ES}$, c'est-à-dire $\frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \emptyset)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin TR}\ \frac{\sin ER}{\sin 90^\circ}$.

D'où l'on tire *ER*, et *SR* (=$90^{\circ}-ER$). Ensuite cherchons Z_MK (=*h*), en considérant *SRK* comme la sécante tu triangle Z_MZP. Nous avons $\frac{\sin SP}{\sin SZ}=\frac{\sin PR}{\sin RZ_M}\frac{\sin Z_MK}{\sin KZ}$, c'est-à-dire $\frac{\sin(180^{\circ}-\emptyset)}{\sin 90^{\circ}}=\frac{\sin(90^{\circ}+TR)}{\sin(TR+\emptyset_M)}\frac{\sin(Z_MK)}{\sin 90^{\circ}}$.

Enfin cherchons *KS (=q)*, en considérant *SZP* comme la sécante du triangle Z_MRK. Nous avons :

$\frac{\sin KS}{\sin SR}=\frac{\sin KZ}{\sin ZZ_M}\frac{\sin Z_MP}{\sin PR}$ c'est-à-dire $\frac{\sin q}{\sin SR}=\frac{\sin 90^{\circ}}{\sin(90^{\circ}-h)}\frac{\sin(90^{\circ}-\emptyset_M)}{\sin(90^{\circ}+TR)}$.

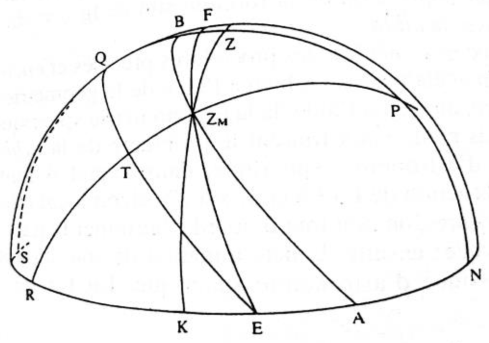

Figure 12 : Direction de la Qibla

Source : David King : Astronomie et société musulmane p.186 (Histoire des sciences arabes, Roshdi Rashed).

Toutes ces méthodes sont équivalentes à une application de la formule moderne de la cotangente pour la trigonométrie sphérique, qui donne :

$$\cot q=\frac{\sin\emptyset\cos\Delta L-\cos\emptyset\tan\emptyset_M}{\sin\Delta L}$$

Cependant, le calcul des triangles sphérique avec la découverte du fameux théorème des sinus simplifiera énormément les calculs :

Désignons la longitude et la latitude d'un point donné *A* et de la Mecque M par φ_1 et φ_2 et par λ_1 et λ_2 respectivement. Nous obtenons ainsi le triangle sphérique *AMB* (figure 10) dont le troisième sommet *B* est le pôle nord et dont les deux cotés *AB*= 90°- φ_1 et *MB*=90°- φ_2, ainsi que l'angle λ_1- λ_2 compris entre ces deux côtés connus. On doit alors déterminer d'après ces données l'angle *MAB*. La résolution du triangle nous donne également le côté *AM*, c'est-à-dire la distance entre le point *A* et *M* en degrés ou en unité de longueur si le rayon de la terre est connu (Djebbar, 2004, p. 424).

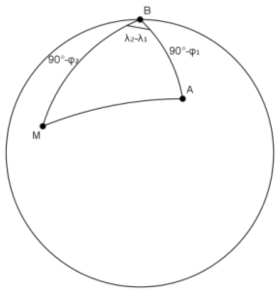

Figure 13 : Triangle sphérique déterminant la direction de la Qibla

Source : GeoGebra.

Théorème des sinus

Ce théorème connu sous le nom de *al-shakl al-mughnī* [la figure qui dispense] (car il évitait aux astronomes d'utiliser le théorème de la figure sécante) a permis aux utilisateurs de faire une grande économie de calcul étant donné que l'inconnue recherchée pouvait être déterminée à partir de trois données (au lieu de cinq avec la figure sécante) et en effectuant à chaque fois deux opérations arithmétiques au lieu de quatre précédemment (Djebbar, 2004, p. 430).

La découverte de ce théorème remplaçant le théorème de la figure sécante a été un événement marquant, car tout le savoir acquis en ce domaine au cours des siècles précédents parait reposer sur une unique proposition, le théorème III, 1 des Sphériques de Ménélaüs, qui est le seul instrument spécifique de l'astronomie sphérique, le seul moyen d'établir à la surface de la sphère des relations entre arcs de grands cercles. Cette découverte s'accompagnera cependant de querelles de priorité, mais les études historiques semblent aboutir à la même conclusion : le théorème du sinus a été découvert de manière indépendante par trois mathématiciens de tradition arabe : au Khwārizm, l'émir Abū Naṣr ibn cIrāq (m. vers 1030), à Bagdad, l'éminent géomètre et astronome Abū al-Wafā' et, à Rayy, réputé pour la qualité de ses observations, l'astronome al Khujandī (m. vers 1000).

Al-Bīrūnī (m. 1048) qui fut l'élève puis le collègue d'Abū Naṣr Ibn [c]Irāq a écrit dans « Kitāb Maqālīd [c]Ilm al-hay'a : « [Voici] la voie suivie par Abū Naṣr, pour la "figure qui dispense", dans la lettre qu'il m'a adressée » :

> «… Les rapports, les uns aux autres, des sinus des côtés d'un triangle formé d'arcs de grands cercles d'une sphère sont égaux aux rapports respectifs des sinus des angles qui leurs sont opposés. » (Debarnot 1985, p. 110).

Autrement dit :

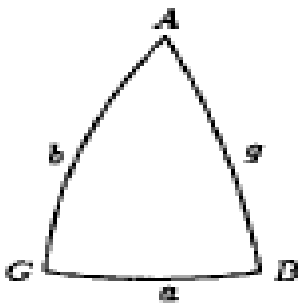

Figure 14 : La figure qui dispense

Source : Ahmed Djebbar, Trigonométrie arabe, p. 430**.**

Si *a*, *b*, *g* sont des arcs de grands cercles et *A*, *B*, *G*, respectivement leurs angles opposés, on a :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin g}{\sin G}$$

Le problème essentiel que pose aux mathématiciens le théorème de Menelaüs est qu'il fait intervenir des rapports composés, le désir d'éviter leur emploi sera, entre autre une raison de préférer à la « figure sécante » une des nombreuses formules équivalentes au théorème des sinus sur la sphère.

Cela sera confirmé ensuite par Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī à la fin du livre IV de son traité, à propos du théorème de la figure sécante : « Les anciens n'ont pas manqué de l'utiliser dans ce but de s'en servir avec confiance ainsi que cela se voit dans le livre de Ménélaüs sur la sphère et dans le commencement de l'Almageste de Ptolémée. Mais les modernes, soit par crainte de s'engager dans l'examen des différents rapports et de leurs variétés, soit pour éviter les longueurs que l'usage des rapports composés entraine dans la pratique, ont imaginé et étudié d'autres figures destinées à tenir la place du quadrilatère et à procurer l'utilité qu'on en retire, sans qu'on ait besoin de recourir à de nombreuses distinctions et aux rapports composés ».

Les méthodes inventées pour résoudre les problèmes métriques sur l'étendue de la sphère ont abouti en cette fin du X^{e} siècle à faire de la trigonométrie une discipline indépendante de l'astronomie et de la géométrie, nous verrons ainsi dans un premier temps, apparaitre dans des traités d'astronomie, des chapitres distincts, puis la publication d'ouvrages indépendants exclusivement consacrés à la trigonométrie, comme le « Livre des arcs inconnus de la sphère » d'Ibn Mu^{c}ādh al-Jayyānī (XI^{e} s.), le « Livre des clefs de l'astronomie » d'al-Bīrūnī et surtout, le « Livre de la figure sécante » de Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (m.1274) (Carathéodory, 1981).

Conclusion

La trigonométrie arabe a été, à l'instar de la trigonométrie grecque et indienne dont elle est l'héritière, une discipline au service d'autres disciplines telle l'astronomie et la géographie.

Concernant la géographie, un des problèmes des plus importants à résoudre en terre d'islam était évidemment l'établissement de la qibla (la direction de la Mecque), plusieurs mathématiciens ont en donné la solution, d'abord approximative, ensuite, exacte à partir du IX^{e} siècle. Diverses méthodes ont été appliquées pour la résolution de ce problème, et celle utilisant la trigonométrie sphérique se verra fortement allégée grâce à la découverte du théorème du sinus.

Première page des « *Sphériques* » de Ménélaūs, révisées par Ibn cIrāq, Ms. Leiden, University Libraries, n° Or. 930.

Bibliographie

Carathéodory, P. (1981). *Traité du Quadrrilatère*. Constantinople.

D'Alembert, J. (1789). *Encyclopédie méthodique, Mathématiques*. Paris : Éditions Panckoucke, t. III.

Debarnot, M.-Th. (1997). Trigonométrie. Dans R. Rashed (édit.) : *Histoire des sciences arabes,* II, (pp. 163-198). Paris : Seuil.

Debarnot, M.-Th. (1985). *Al-Bīrūnī, KitābMaqālīd'IlmAl-Hay'a* [Thèse de doctorat, Institut Français de Damas]. Damas.

Djebbar, A. (2004). *La phase arabe de l'histoire de la trigonométrie* [Actes du colloque]. Les instruments scientifiques dans le patrimoine : quelles mathématiques ? (Rouen, 6-8 avril 2001). Paris : Edition Ellipse, pp. 415-435.

Gillipsie, Ch.-C. (édit) (1981). *Dictionnary of Scientific Biography*. New York : Scribner's Sons.

King, D.-A. (1997). Astronomie et société musulmane : « qibla », gnomonique, « mīqāt ». *Dans* R. Rashed (édit.). *Histoire des sciences arabes,* I, (pp. 173-215). Paris : Seuil.

Pameshwar, J. (1988). *Aryabhata and his contribution to mathematics,* Patna : Bihar Research Society, pp. 253-259.

Ptolémée, Cl (1813). *L'Almageste,* (M. Halma, trad.). Paris : Edition Henri Grand, t.1, pp. 50-54.

Youschkevitch, A.-P. (1976). *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles).* Paris : Vrin, pp. 132-146.