

Un ouvrage majeur de la géographie mathématique arabe, *Kitāb taḥdīd al-amākin* d'Abū l-Rayḥān al-Bīrūnī

Setti AYAD ^(1,2)

Introduction

« Kitāb taḥdīd al-amākin » (Ali, 1967). [Le livre sur la détermination des lieux] est un traité du XI^e siècle sur la géographie mathématique, écrit par Abū l-Rayḥān Muḥammad (m. vers 1048). Il commença l'écriture de ce livre durant son périple de prisonnier politique qui l'amena, vers 1018, de sa région natale Khwārizm¹, qui fait partie de l'actuel Ouzbékistan, à la capitale Ghazna de l'empire Ghaznavide (qui exista de 962 à 1187) dans l'actuel Afghanistan (Kennedy, 1973). Il compléta son travail après son arrivée à Ghazna où il fit partie de la suite de Maḥmūd al-Ghaznawī (m. vers 1030). Les conquêtes de ce dernier se sont étendues jusqu'aux provinces du nord de l'Inde qui ont fait partie de cet empire et où d'ailleurs a vécu al-Bīrūnī pendant de longues années.

Al-Bīrūnī est né le 4 septembre 973 (Djebbar, 1990), à une époque d'une grande vitalité scientifique. En effet, la période qui s'étend du milieu du X^e siècle au milieu du XI^e siècle a profité d'un puissant mécénat et d'une certaine concurrence entre différentes villes et

(1) Professeur, Université Oran 1, Département de Mathématiques, 31 000, Oran, Algérie.

(2) Centre de Recherche en Anthropologie Sociale et Culturelle, 31 000, Oran, Algérie.

¹ Son nom « al-Bīrūnī » proviendrait de son village natal « Bīrūn » qui était une sorte de faubourg de la ville de Kath (*Encyclopédie de l'Islam*, vol. 1, 1986, p. 1236).

différents pouvoirs locaux, qui ont ainsi participé au développement d'importantes traditions scientifiques.

En plus des villes du centre de l'empire musulman, ce phénomène touche des villes d'Asie comme Boukhara, Rayy ou Ghazna, où al-Bīrūnī va écrire une grande partie de son œuvre scientifique, et des villes d'Occident comme Cordoue, Séville ou Kairouan.

Al-Bīrūnī, au-delà de son génie et de sa dimension personnelle, témoigne à travers sa vie et son œuvre de cette époque, qu'il qualifie lui-même dans ses *Maqālīd 'ilm al-hay'a* [les clés de l'astronomie]

« D'époque si étonnante, si prodigieusement féconde, mais non exempte de contradictions... si nos contemporains voient se multiplier les domaines de la connaissance, s'ils sont naturellement enclins à rechercher en toute science la perfection, ... une âpre rivalité oppose ceux qui sont en compétition. »
(Debarnot, 1985, p. 94).

Il entretient, à différentes étapes de sa vie, une correspondance scientifique avec des mathématiciens et des philosophes célèbres ou qui allaient le devenir. C'est ainsi que sa correspondance qu'il a avec Abū l-Wafā' qui vivait à Bagdad, à propos d'astronomie, aboutira à la mise au point de l'observation de l'éclipse de lune du 24 mai 997 (Djebbar, 1990) à Bagdad et à Kath, où séjournait al-Bīrūnī, afin d'améliorer la précision du calcul de la différence de longitude entre ces deux villes.

Al-Bīrūnī apporte tout au long de sa vie une importante contribution à l'astronomie et aux mathématiques par des synthèses brillantes, des améliorations techniques et des résultats nouveaux. Il effectue de nombreuses observations en astronomie et étudie les instruments astronomiques, leur conception et parfois leur réalisation. Ses travaux viennent enrichir les outils de la trigonométrie et contribuent à transformer cet ancien chapitre de l'astronomie en une discipline à part entière (Djebbar, 1990).

Nous étudions dans ce travail *Kitāb taḥdīd al-amākin* d'al-Bīrūnī. Le premier objectif de l'auteur dans ce livre est la détermination de la position géographique de la ville de Ghazna par rapport à la Mecque et à Bagdad, ce qu'il fait avec une précision remarquable. Il décrit des techniques de calcul de la latitude, de la longitude et de l'inclinaison de

l'écliptique par rapport au plan de l'équateur², et il étudie et critique les résultats obtenus par d'autres observateurs à ce propos. Le résultat est un important traité sur la géodésie avec de nombreux éléments d'un grand intérêt pour les historiens de l'astronomie, des mathématiques et de la géographie.

Toutefois l'auteur ne se contente pas de calculs mathématiques stricts. Il traite plusieurs thèmes liés à ces calculs tels que le changement géologique (Boilot, 1986), la datation de la création de la terre, la localisation des tremblements de terre et des inondations, les déserts salés et la salinité de la mer caspienne et du golfe persique, la détermination des zones habitables, la situation de l'hémisphère sud, etc.

Al-Bīrūnī se réfère à une catégorie de livres de géographie portant le titre de *al-masālik wa l-mamālik* [Les routes et les royaumes], produits en pays d'islam, à partir du IX^e siècle. Ces traités, dont le plus ancien est celui d'ibn Khurdādbih (m. vers 849) (Minorsky, 1937), qui était responsable des services postaux du califat abbasside, donnent les distances entre les villes, la localisation des relais postaux entre eux et d'autres informations de ce type.

Il fait aussi référence au traité d'Abū °Abdallāh Muḥammad ibn Aḥmad al-Jayhānī, ministre de l'émir de la dynastie des Samanides Naṣr b. Aḥmad (qui régna entre 914 et 943). Al-Jayhānī, qui était en position d'obtenir des informations géographiques à partir de sources très dispersées, a publié un ouvrage en sept volumes, aujourd'hui perdu, et qui était utilisé par beaucoup de géographes longtemps après son décès (Zimonyi, 2016).

Les efforts d'al-Bīrūnī pour obtenir des positions précises pour des localités géographiques furent facilités par leur représentation sur une surface sphérique. Il avait construit l'hémisphère terrestre (Ali, 1967) durant la période prospère (1003-1016) qu'il passa chez lui à Khwārizm sous la protection du souverain Abū al-°Abbās Ma'mūn (m. vers 1017), ce qui lui permit de reporter les coordonnées de plus de six cents localités dans son célèbre ouvrage *al-Qānūn al-mas'ūdī* [le Canon mas'udien].

² Inclinaison, par rapport au plan de l'équateur, du plan géométrique contenant la trajectoire apparente du soleil autour de la Terre.

La lecture du livre d'al-Bīrūnī nécessite des connaissances techniques considérables. Il établit des centaines de calculs trigonométriques dont le traitement peut être simplifié par des méthodes graphiques.

Nous abordons dans ce travail certains résultats de ce livre en tentant de faciliter la compréhension du texte original par l'utilisation d'arguments et symboles mathématiques modernes et en reprenant les figures refaites par E.-S. Kennedy (1973). Notons toutefois que tous les calculs vérifiés par nos soins ne sont pas rapportés dans ce document, pour ne pas en alourdir le contenu, et peuvent être communiqués au lecteur sur demande.

Symboles

Les symboles utilisés dans ce travail sont donnés dans le tableau ci-dessous. Par souci de clarté, rappelons que les fonctions trigonométriques sont habituellement notées à cette époque avec une majuscule pour les distinguer de leurs contreparties modernes. Nous avons par exemple.

$$\text{Sin } x = R \sin x,$$

où R désigne le rayon du cercle de définition, généralement $R = 60^\circ$. Nous pouvons aussi noter (pour éviter toute ambiguïté).

$$\text{Sin}_\delta x = \delta \sin x.$$

α	Ascension droite
φ	Latitude
\wedge	Longitude
α_φ	Ascension oblique d'une localité de latitude φ
$\widehat{\quad}$	Arc
az	Azimut
β	Latitude céleste
λ	Longitude céleste
\cdot	Dérivée par rapport au temps
Δ	Différence, $\Delta x = x_2 - x_1$
δ	Déclinaison solaire
ε	Obliquité
h	Altitude
\hat{h}	Distance du zénith
k	Longueur d'un degré sur le méridien

r	Distance à l'horizon entre le point le plus à l'est et le point de naissance du soleil
$vers$	Sinus verse, $vers\ x = 1 - \cos\ x$
—	$\overline{AB} = 90^\circ - AB$
s	Soleil, lorsqu'il est utilisé en indice
m	Lune, lorsqu'il est utilisé en indice
crd	La fonction corde, $crd\ x = 2\ \sin\ (x/2)$

Zones habitables

Al-Bīrūnī fait appel au principe de symétrie pour assurer, comme Aristote avant lui (Aristote, 1952), que la disposition des territoires dans la moitié sud du globe terrestre doit être semblable à celle du nord. Il utilise comme argument que toute projection circulaire dans le nord devrait avoir son homologue dans le sud, la forme résultante d'une telle projection étant plus proche d'un cylindre que d'une sphère.

Pour examiner les possibilités de zones habitables dans l'hémisphère sud, al-Bīrūnī considère connus les territoires habitables extrêmes et les plus au sud dans l'hémisphère nord et cherche à les dupliquer au sud de l'équateur.

Il suppose de manière tacite que seuls deux arguments affectent la température d'une localité : la distance du soleil à la terre et la proximité du soleil avec le zénith au passage du méridien.

Pour optimiser le premier argument, le soleil doit être le plus proche de la terre, ce qui a lieu au plus près du solstice d'hiver.

Al-Bīrūnī considère une zone climatique de latitude $\varphi = 16,39^\circ$, arrondie aux minutes. La distance zénithale du soleil est alors donnée par (figure 1) :

$$h = \varphi + \varepsilon = 16,39^\circ + 23,35^\circ = 40,14^\circ.$$

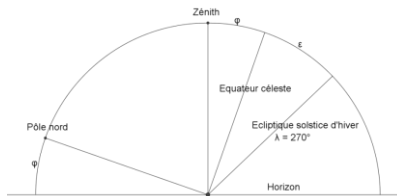


Figure 1 : La distance zénithale du soleil

Source : Auteur

Une localité dans l'hémisphère sud qui a la même distance zénithale à la même distance soleil-terre, au moment du solstice d'hiver dans l'hémisphère nord (qui correspond à $\lambda = 270^\circ$), devrait avoir les mêmes conditions climatiques. Sa latitude est égale à (figure 2) :

$$\varphi_1 = h + \varepsilon = 40,14^\circ + 23,35^\circ = 63,49^\circ.$$

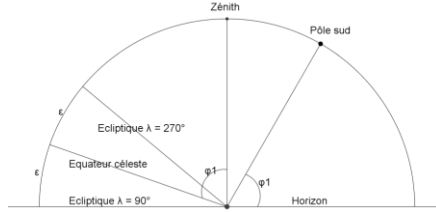


Figure 2 : La latitude dans l'hémisphère sud

Source : Auteur

Pour cette localité, la distance zénithale du soleil au point culminant, au moment du solstice d'été dans l'hémisphère nord (qui correspond à $\lambda = 90^\circ$), est égale à :

$$h_1 = h + 2\varepsilon = 40,14^\circ + 47,10^\circ = 87,24^\circ,$$

Cette valeur étant différente de celle trouvée par al-Bīrūnī (84°) (Ali, 1967). Cependant, il affirme qu'aucun lieu ayant cette distance zénithale au solstice d'été, ne peut être trouvé sur l'hémisphère nord. Cette affirmation est vraie puisque la plus grande distance zénithale possible est $\varepsilon = 66,25^\circ$.

Pour un lieu de latitude nord $\varphi = 60^\circ$, la distance zénithale solaire maximale est (figure 1) : $h = \varphi + \varepsilon \approx 60^\circ + 24^\circ = 84^\circ$,

Ce qui ne peut se produire qu'au solstice d'hiver, lorsque le soleil est au plus près de la terre. Une telle latitude est trop froide pour être habitable et des êtres vivants ne peuvent donc pas subsister à une latitude sud supérieure à 60° (64° pour al-Bīrūnī).

Les remarques faites par al-Bīrūnī à propos d'une localité de latitude sud $\varphi = 48^\circ (\approx 2\varepsilon)$ ne semblent pas avoir de sens puisqu'il affirme que le climat y est plus chaud que les températures plus fraîches atteintes à l'équateur.

Cependant, ses conclusions sont claires : Puisque les deux effets agissent l'un contre l'autre dans l'hémisphère nord, le soleil approchant de la terre en hiver et s'éloignant en été, le résultat est une modération des températures extrêmes froides et chaudes dans cet hémisphère (Kennedy et Muruwwa, 1958).

Les limites climatiques et leurs calculs

Les sept climats de l'antiquité sont des bandes contigües de l'hémisphère nord, parallèles à l'équateur ainsi définies (Honigmann, 1992) : Le milieu du premier climat est la parallèle de latitude le long de laquelle la longueur maximale de la lumière du jour est de treize heures. Le milieu du second climat a une longueur maximale de lumière du jour de treize heures et demie. Et ainsi de suite, en ajoutant une demi-heure pour chaque climat successif.

Le début du premier climat est la parallèle de lumière du jour maximale de 12h45. Sa fin (qui est le début du second climat) est la parallèle de lumière du jour maximale de 13h15, et ainsi de suite, en prenant un quart d'heure de différence avant et après le milieu des climats suivants.

Nous reprenons les valeurs précédentes pour q , $\sin q$ et $C \cdot \cos \varepsilon / R$. Les quantités $(\sin^2 \varepsilon + D^2)^{1/2} = \sin r$, où r désigne l'augmentation de l'amplitude ainsi que $D/E = \cos \varepsilon \cdot \sin q / \sin r = \sin \varphi$ et $\text{arc Sin } F$ sont aussi recalculées. La dernière formule ci-dessous représente alors la valeur φ désirée.

Al-Bīrūnī donne une autre déduction de ses calculs en se basant sur une figure plane (figure 3). Il établit que $HZ = \sin_{HD} q$, ce qui équivaut à dire que

$$\sin_{HD} q / \sin_R q = HD / R,$$

ou

$$\sin_{HD} q = HZ = (HD \cdot \sin q) / R = \sin q \cdot \cos \varepsilon / R.$$

En notant que $ZE = (HZ^2 + \sin^2 \varepsilon)^{1/2} = \sin r$ et en remarquant que $ET = R$ et $TK = \sin \varphi$, on a, à partir des triangles semblables EHZ et TEK , l'équation

$$ZE / HZ = ET / TK,$$

ou

$\text{Sin } \varphi = \text{HZ} \cdot R / \text{Sin } r = (\text{Sin } q \cdot \text{Cos } \varepsilon / R) \cdot (R / \text{Sin } r) = \text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Sin } q / \text{Sin } r$, ce qui représente la relation désirée.

Malheureusement pour l'exactitude des calculs, deux erreurs au début des calculs affectent les résultats finaux. Al-Bīrūnī affirme que

$\text{Sin } \varepsilon = 24 ; 0, 57, 38$ et $\text{Cos } \varepsilon = 54 ; 59, 59, 5$,

alors qu'en rappelant que $\varepsilon = 23,35^\circ$, nous savons que

$\text{Sin } \varepsilon = 24 ; 0, 17, 48, 38$ et $\text{Cos } \varepsilon = 54 ; 59, 19, 29, 45$.

Pour le *sinus*, cette erreur, probablement de copistes, semble provenir d'un point figurant sur la troisième valeur donnée par al-Bīrūnī, qui a converti le ya' ζ , pour 10, en nūn ζ , pour 50, et de même pour le *cosinus*. En arrondissant le *sinus* à $24;0;58$ et en élevant au carré, nous obtenons 7, 474, 985 et 764 quarts, qui apparaissent aussi dans le texte d'al-Bīrūnī.

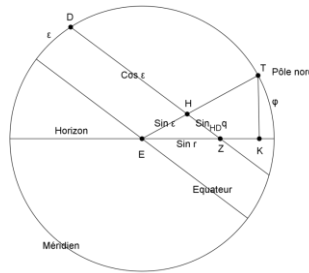


Figure 3 : La latitude d'une zone climatique

Source : Auteur

Relations entre l'altitude du méridien solaire, la déclinaison solaire³ et la latitude locale

Ces trois quantités sont liées par une relation arithmétique simple. Rappelons que si h est l'altitude du méridien solaire, mesurée à partir du sud, δ la déclinaison solaire et φ la latitude locale, alors

³ La déclinaison solaire est l'angle formé par la droite reliant la terre au soleil et le plan équatorial.

$$\varphi = \delta + h^4.$$

Lorsque h est mesuré à partir du nord, alors $\varphi = \delta - h$.

Ainsi si deux des quantités φ , δ ou h sont connues, la troisième découle immédiatement de l'une des expressions ci-dessus.

Trois exemples de calculs sont effectués par al-Bīrūnī. Le premier est basé sur une observation faite par lui le 14 octobre 1018 aux alentours de Kaboul dans des circonstances difficiles qui illustrent bien la dévotion d'al-Bīrūnī à la science : C'était juste après l'extinction de la dynastie Khwārizm, la mort de son souverain et protecteur et sa déportation avec d'autres notables locaux après l'avènement du pouvoir de Maḥmūd al-Ghaznawī.

Alors qu'il est emmené vers le sud en direction de Ghazna, al-Bīrūnī saisit l'opportunité de déterminer la latitude de Kaboul en mesurant l'altitude du méridien solaire, probablement avec un instrument improvisé sur place (Kennedy, 1973). A l'aide du zīj⁵ d'al-Battānī (1899-1907), il calcule la déclinaison du soleil à ce moment et obtient $\delta (\lambda_s) = 10,19^\circ$. Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi &= 90^\circ - (h - \delta) \\ &= 90^\circ - (45^\circ - (-10,19^\circ)) = 34,41^\circ,\end{aligned}$$

Sachant que la valeur moderne de la latitude de Kaboul est de $34,30^\circ$.

Le second exemple a été ordonné par Abū al-Faḍl ibn al-°Amīd (Brockelmann, 1943), ministre de l'émir bouyide Rukn ad-Daula (m. vers 976). Al-Bīrūnī effectue ses observations à Kāshān, une ville du centre de l'Iran, le 06 octobre 960. Il utilise son propre tableau de déclinaison solaire pour obtenir $\delta (\lambda_s) = 7,20^\circ$.

Ainsi

$$\varphi = 90^\circ - (50^\circ + 7,20^\circ) = 32,40^\circ.$$

⁴ Al-Bīrūnī ne traite pas le cas $\delta < 0$. Signalons cependant qu'en considérant des valeurs négatives de δ , cette expression a lieu que le soleil soit au nord de ZE ($\delta > 0$) ou au sud ($\delta < 0$).

⁵ Zīj: Mot persan qui désigne un manuel astronomique de tables. Pour l'aspect étymologique et historique, voir l'article de D. A. King & J. Samsó, *Zīj, Encyclopédie de l'Islam*, Leiden, Brill, vol. 11, 2002, pp. 496-508.

Notons que la précision de cette détermination n'est pas bonne puisque la valeur moderne de la latitude de Kāshān est de $33,59^\circ$.

Le troisième exemple donné par al-Bīrūnī concerne ses observations à Jurjāniya (Iran) le 17 septembre 1016 (Kennedy, 1973). Il prend $h = 47,44^\circ$, $\varphi = 47,43^\circ$ et trouve dans ce cas la déclinaison du soleil au moment de l'observation

$$\delta = h - \varphi = 0,1^\circ.$$

Relation entre la déclinaison solaire, l'altitude d'azimut zéro et la latitude locale

Cette situation spéciale ne ressemble à celle discutée ci-dessus que par le fait que l'altitude est observée au moment où le soleil passe à travers une direction cardinale. La simplicité d'une configuration plane ne permet pas la représentation de ce modèle et l'utilisation de la trigonométrie sphérique est nécessaire.

La relation souhaitée est déduite de la figure 4, où LO est une droite verticale, OF et LF deux droites perpendiculaires à ZD et OK perpendiculaire à LF . Ainsi

$$\frac{LO}{OK} = \frac{\sin LKO}{\sin OLK},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin h}{\sin \delta} = \frac{R}{\sin \varphi}.$$

Ce qui donne

$$\sin \varphi = \frac{\sin \delta}{\sin h},$$

et chacune des valeurs φ , δ , h peut être calculée à partir des deux autres.

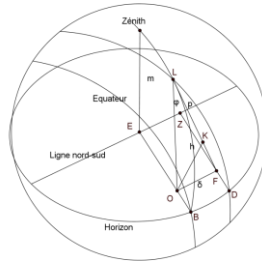


Figure 4 : Exemple d'utilisation de la trigonométrie sphérique

Source : Auteur

Relations entre la latitude locale, la déclinaison solaire, l'altitude et l'azimut

Le problème discuté ci-dessus est un cas particulier de celui-ci. Supposons que nous cherchions à calculer φ sachant que les trois autres quantités δ, h, az^6 sont connues.

En se référant aux trois cas des figures 5, 6 et 7, et étant donné que les triangles sont semblables, on a

$$\frac{EC}{OC} = \frac{EM}{\sin BM},$$

où OC représente la part de l'azimut az . Ainsi

$$\frac{\cos h}{OC} = \frac{R}{\sin az},$$

de sorte que $OC = \frac{\cos h \sin az}{R}$.

Notons que les points O, F et L appartiennent au plan parallèle au plan méridien, OF est sur le plan de l'horizon et LF sur le plan du cercle de jour. Donc l'angle $LFO = \varphi$ et puisque LO est vertical, alors l'angle $OLF = \varphi$.

Traçons CK perpendiculaire à LF . Par le théorème de Pythagore, on a

$$LC = (LO^2 + OC^2)^{1/2} = (\overline{\sin^2 h} + \overline{OC^2})^{1/2}.$$

⁶ az : azimut.

Dans le triangle rectangle LOC , on a
 $LC / OC = \text{Sin} (LOC = 90^\circ) / \text{Sin} OLC$,
 de sorte que OLC peut être calculé.

De même, dans le triangle rectangle CLK , on a
 $CK / CL = \text{Sin} CLK / \text{Sin} (CKL = 90^\circ)$,

avec $CK = \text{Sin} \delta$ et CL déjà calculé, de sorte que l'angle CLK peut être calculé. Ainsi

si $\delta < 0$ et l'azimut est sud (figure 5), alors $\varphi = \text{angle } OLC - \text{angle } CLF$;

si $\delta > 0$ et l'azimut est sud (figure 6), alors $\varphi = \text{angle } OLC + \text{angle } CLF$;

si $\delta > 0$ et l'azimut est nord (figure 7), alors $\varphi = \text{angle } CLF - \text{angle } OLC$.

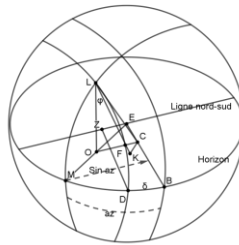


Figure 5 : Cas de déclinaison solaire négative et azimut sud

Source : Auteur

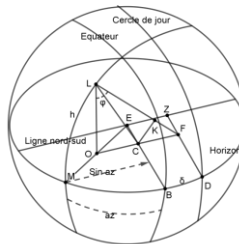


Figure 6 : Cas de déclinaison solaire positive et azimut sud

Source : Auteur

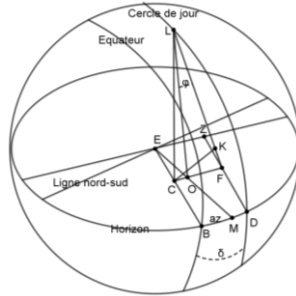


Figure 7 : Cas de déclinaison solaire positive et azimuth nord

Source : Auteur

Notons que cette figure d'al-Bīrūnī est incorrecte puisque l'angle OLK n'est obtus dans aucun des cas considérés.

Si $\delta = 0$, le point F se confond avec C , l'arc déterminé par l'angle CLK devient nul et φ est l'arc OLC .

Autrement si φ et les coordonnées du soleil sur le plan de l'horizon sont connues, δ peut être calculé et la part de l'azimut OC aussi. Ainsi puisque

$$\frac{LO}{OF} = \frac{\sin OFL}{\sin OLF},$$

alors

$$OF = \sin h \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Ici al-Bīrūnī n'utilise pas non plus la fonction tangente (comme il l'a fait pour d'autres problèmes (Kennedy, 1973)), ce qui aurait permis de gagner du temps.

On a $CF = OC - OF$, $OF - OC$, $OC + OF$ dans les figures 5, 6, 7 respectivement et $\frac{CF}{CK} = \frac{\sin CKF}{\sin KFC}$, dans le triangle rectangle CFK , avec $CK = \sin \delta$, $CKF = 90^\circ$ et $KFC = \varphi$.

On obtient alors

$$\sin \delta = CF \cdot \frac{\cos \varphi}{R}.$$

Nous pouvons ainsi calculer l'azimut en fonction de φ , δ et h , en utilisant notamment le théorème de Pythagore, pour obtenir $KF = (CF^2 - \text{Sin}(\delta)^2)^{1/2}$ ⁷.

Les calculs géométriques donnent ensuite une portion de l'azimut égale à $OC = OF \pm CF$, le signe + étant utilisé dans le cas $\delta < 0$, pour obtenir finalement

$$\text{Sin } az = R \cdot \frac{OC}{\text{Cos } h}.$$

Dans tout ce qui précède, al-Bīrūnī utilise la trigonométrie plane sur des figures construites à l'intérieur de la sphère. Dans une dernière situation (Kennedy, 1973), que nous n'abordons pas dans ce travail, où δ , φ et l'azimut sont utilisés pour calculer h , il travaille entièrement sur la surface de la sphère et utilise les arcs des grands cercles⁸.

Les méthodes de Ibn al-Šabbāḥ et d'Ibn 'Irāq pour trouver l'inclinaison de l'écliptique par rapport au plan de l'équateur :

Désignons par P le point le plus à l'est de l'horizon traversé par le soleil (dans son déplacement apparent), lorsqu'il se lève un jour d'équinoxe⁹ ($\delta = \varepsilon$). Considérons un petit cercle¹⁰ sur la sphère céleste passant par P et ayant le point Est de l'horizon comme pôle : c'est ce que l'on appelait cercle d'amplitude montante, et qui avait la curieuse propriété suivante :

En général, le soleil montant traverse l'horizon en un point intérieur au cercle. Projetons ce point verticalement sur le cercle d'amplitude montante, vers le haut si la longitude solaire $\lambda < 180^\circ$ et vers le bas autrement, et appelons ce point de projection Q . Alors l'arc PQ est à tout moment égal à λ et Q se déplace le long du cercle d'amplitude

⁷ L'utilisation de la fonction tangente dans l'expression $KF = \text{Sin } \delta \cdot \tan \varphi$, aurait simplifié ici aussi les calculs.

⁸ Les grands cercles sont les géodésiques d'une sphère, c'est-à-dire les chemins possédant la plus petite courbure et les arcs de grands cercles sont par conséquent les plus courts chemins reliant deux points à la surface de la sphère.

⁹ L'équinoxe est l'instant de l'année où le soleil traverse le plan équatorial changeant d'hémisphère céleste. Une année connaît deux équinoxes au début du printemps et de l'automne.

¹⁰ Un petit cercle, appelé aussi parallèle de l'étoile, est la trajectoire apparente d'une étoile au cours du mouvement diurne de la terre.

montante avec la même vitesse angulaire¹¹ avec laquelle le soleil se déplace par rapport au plan de l'écliptique.

Ce phénomène circulaire semble avoir été bien connu des astronomes musulmans puisqu'ils l'appliquaient librement sans se soucier de le démontrer (Kennedy et Sharkas, 1962). L'astronome Ibn al-Šabbāḥ¹², dont on ne connaît pratiquement rien (Suter, 1900), mentionné par al-Bīrūnī dans ce livre ainsi que dans son *canon* (Al-Bīrūnī, 1954-1956), utilisait ce cercle pour déterminer ε .

Concernant cet astronome, Ibn ʿIrāq, le professeur d'al-Bīrūnī (m. vers 1036 à Ghazna) aurait publié une « *Risāla fī l-burhān ʿalā ʿamal Muḥammad Ibn al-Šabbāḥ fī imtiḥān al-shams* » [Epître sur la justification de la construction d'Ibn al-Šabbāḥ au sujet de la mesure (du mouvement) du soleil] (Al-Ziriklī, 1980).

La procédure consiste à observer l'amplitude montante du soleil en un lieu pour lequel nous connaissons φ et ce à trois moments différents, dans la même saison, séparés par le même intervalle temps. Nous utilisons alors ces données pour avoir une amplitude montante maximum r_{max} et calculons ε en fonction de φ et r_{max} .

La technique pour obtenir r_{max} est la suivante :

On pose $2 \text{ Sin } r_1 = n_1$, $2 \text{ Sin } r_2 = n_2$ et $2 \text{ Sin } r_3 = n_3$. La « corde extraite » à partir de ces valeurs est alors donnée par $c = (n_2^2 - n_1 n_3)^{1/2}$, et la perpendiculaire par $p = (n_2^2 - (n_1 n_3 / 2)^2)^{1/2}$. On obtient ainsi

$$r_{max} = \text{arc Sin } (cn_2 / 2p).$$

Pour comprendre ces opérations, on peut regarder l'exemple suivant d'al-Bīrūnī (Kennedy, 1973). Si l'observateur est à l'équateur, c'est-à-dire $\varphi = 0$, l'amplitude montante chaque jour est égale à la déclinaison du soleil au moment du lever de soleil, de sorte que le cercle d'amplitude montante maximum se réduit à un cercle de distance polaire égale à ε .

¹¹ La vitesse angulaire d'un point est un vecteur orthogonal au plan de trajectoire de ce point (ici plan de l'écliptique) de longueur égale à sa vitesse angulaire (vitesse de rotation).

¹² Sezgin, F. *Geschichte des Arabischen Schrifttum*, Band V, pp. 252-253 ; Band VI, pp. 148-149, où il présente les trois frères Banū al-Šabbāḥ, dont l'un porte le prénom « Muḥammad ».

Al-Bīrūnī profite ici du fait que les déclinaisons sont faciles à observer contrairement aux amplitudes montantes. Il effectue durant l'année 1016, trois observations de déclinaison du soleil δ à trente jours d'intervalle :

Mercredi 11 juillet, $\delta_3 = 21,28^\circ$, donc $n_3 = 2 \text{ Sin } \delta_3 = 158,095$ secondes ;

Vendredi 10 août, $\delta_2 = 14,0^\circ$, donc $n_2 = 2 \text{ Sin } \delta_2 = 104,510$ secondes ;

Dimanche 9 septembre, $\delta_1 = 3,12^\circ$, donc $n_1 = 2 \text{ Sin } \delta_1 = 24,115$ secondes.

L'application du théorème du sinus à un triangle rectangle sphérique d'hypoténuse de longueur λ et d'angle aigu de mesure ε donne la proportion $\text{Sin } \lambda / \text{Sin } \delta = R / \text{Sin } \varepsilon$.

L'hypoténuse d'un tel triangle représente un arc du plan de l'écliptique partant du point vernal (équinoxe d'automne), ce qui établit le fait que la trajectoire du soleil sur le plan de l'écliptique s'accompagne d'une trajectoire angulaire égale du point correspondant sur le cercle de déclinaison.

Nous allons démontrer ces résultats sur la figure 8 qui représente le cercle de déclinaison avec trois points B , G et D , correspondant aux trois observations ci-dessus.

Au point A , on a $\delta = \lambda = 0$ et les cordes des arcs AB , AG et AD sont de longueurs respectives n_1 , n_2 et n_3 . On prend aussi les arcs $BG = GD = \Delta\lambda$ et la corde de l'arc DE de longueur $2 \text{ Sin}\delta_2 = n_2$. Et en prenant $DZ = DE$ et $MZ = BD$, on a

$$DM = AE \text{ et } BZ = 2 \text{ Sin } \delta_3 = n_3.$$

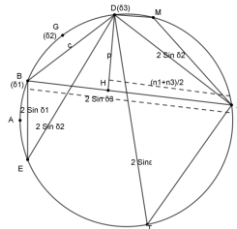


Figure 8 : Application du théorème du sinus sur le cercle de déclinaison

Source : Auteur

Exemple 1

Appliquons le théorème général de Ptolémée¹³ au trapézoïde isocèle $BDMZ$. Ce théorème établit que dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. Ainsi

$$BM^2 = BD^2 + ZB \cdot MD,$$

Ce qui permet de retrouver le résultat précédent : $BD^2 = n_2^2 - n_1 \cdot n_3 = c^2$.

Notons que les calculs donnent $c = 84,320$ secondes là où al-Bīrūnī trouve 84,427.

D'autre part, observons sur la figure 8 que DH est perpendiculaire à DM et BZ , de sorte qu'en utilisant une propriété du trapézoïde, on obtient

$$HZ = (n_1 + n_3) / 2.$$

Ainsi

$$DH^2 = DZ^2 - HZ^2 = n_2^2 - (n_1 + n_3) / 2,$$

C'est-à-dire $DH = p$, qui est effectivement une perpendiculaire. En effectuant les calculs, on trouve $p = 51,383$ secondes.

Ici les calculs sont effectués avec la valeur (erronée) d'al-Bīrūnī pour n_2 . Un calcul effectué avec les valeurs exactes donne $p = 51,208$ secondes.

Finalement, le diamètre DT du cercle forme avec le point Z un triangle rectangle, semblable au triangle BDH . Ainsi

$$DT / DZ = BD / DH,$$

ou encore

$$DT / n_2 = c / p.$$

On obtient finalement $DT = 2 \text{ Sin } \varepsilon$ d'où $\varepsilon = \text{arc Sin } (cn_2 / 2p)$, la valeur ci-dessus de r_{max} . Les calculs, avec les valeurs (erronées) d'al-Bīrūnī, donnent $\varepsilon = 23;25,19^\circ$, là où la valeur exacte est $\varepsilon = 23;28,30^\circ$.

¹³ « Ce théorème établit que dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés », C. Ptolémée (1813). *L'Almageste*. M. Halma (trad.), Paris, Henri Grand éditeur, pp. 29-30.

Al-Bīrūnī critique, à un certain point, cette méthode. Il est vrai par exemple que des intervalles de temps égaux ne correspondent en général pas à des arcs égaux le long du plan de l'écliptique, alors que cette hypothèse est tacite dans la procédure.

Abū Naṣr Ibn ʿIrāq a également apporté sa contribution à la résolution de ce problème. Cet astronome éminent était également connu pour ses travaux en trigonométrie, en particulier sa contribution à l'établissement du théorème du sinus. Il a étudié auprès d'Abū l-Wafā' et a été le professeur d'al-Bīrūnī vers 990. De là est née, avec ce dernier, une collaboration scientifique qui devait durer plusieurs années durant lesquelles ils se sont dédiés, l'un à l'autre, de nombreuses œuvres (Berggren, 2007).

La méthode d'Ibn ʿIrāq, qui utilise uniquement deux observations d'amplitude montante, est utilisée pour le calcul de $\Delta\lambda$, le mouvement (réel) du soleil durant l'intervalle temps séparant ces deux observations (Kennedy et Sharkas, 1962).

Comme pour la méthode d'Ibn al-Ṣabbāḥ, nous donnons la procédure puis vérifions sa validité. A partir de deux observations d'amplitude montante r_1 et r_2 , nous posons $n_1 = 2 \text{ Sin } r_1$ et $n_2 = 2 \text{ Sin } r_2$, et calculons $((n_1 + n_2) / 2) \cdot (R / 2 \text{ Cos } (\Delta\lambda / 2))$, que l'on note s . Puisque $w = (s^2 - n_1 n_2)^{1/2}$, on obtient

$$w \cdot 2R / 2 \text{ Sin } (\Delta\lambda / 2) = 2 \text{ Sin } r_{\max}.$$

Le fait que $\Delta\lambda$ doit être réduit de moitié avant de chercher le cosinus et le sinus n'est pas précisé dans le texte d'al-Bīrūnī, bien qu'il le fasse en exécutant le calcul. Ibn ʿIrāq le précise quant à lui explicitement.

Al-Bīrūnī utilise à nouveau ses résultats d'observation de la déclinaison du soleil à Jurjānyia les 10 Août et 09 Septembre 1016 (section 3 ci-dessus). Il change les notations de sorte que r devient δ et r_{\max} devient ϵ , et reprend les valeurs $n_1 = 24,115$ secondes et $n_2 = 104,510$ secondes.

Sur le cercle de déclinaison (figure 9), les points A , B et D correspondent respectivement aux déclinaisons 0° , δ_1 et δ_2 . En reprenant les calculs ci-dessus, on a l'arc $BD = \Delta\lambda$, auquel al-Bīrūnī donne la valeur $29 : 17^\circ$. Ainsi $\Delta\lambda / 2 = 14;38,30$, son sinus est $15;9,59$ et son cosinus $58;3,5$.

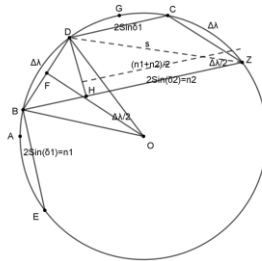


Figure 9 : Application du théorème du sinus sur le cercle de déclinaison

Source : Auteur

Exemple 2

Les bases du trapèzoïde isocèle $BDCZ$ sont n_1 et n_2 et puisque DH est perpendiculaire aux deux bases, HZ représente leur moyenne arithmétique, soit 17;51,32 dans les calculs d'al-Bīrūnī alors que la valeur exacte est 17;51,52.

Dans le triangle rectangle HDZ , on a

$$HZ / DZ = \text{Cos } Z / R,$$

d'où

$$DZ = HZ \cdot R / \text{Cos } Z = (n_1 + n_2) R / 2 \text{Cos } (\Delta\lambda / 2) = s.$$

Al-Bīrūnī obtient la valeur $s = 18;25,55$ en utilisant sa valeur erronée (relevée ci-dessus) pour HZ . Les calculs avec la valeur exacte de HZ donnent $s = 18;27,51$.

Le théorème de Ptolémée, appliqué au quadrilatère $BDCZ$, s'écrit

$$BD^2 = DZ^2 - BZ \cdot BC,$$

d'où $BD = (s^2 - n_1 n_2)^{1/2} = w$. Al-Bīrūnī trouve $w = 43,390$ secondes, alors que l'utilisation de la valeur exacte de s donne $w = 43,568$ secondes.

Etant donné que OBD est un triangle isocèle et que OF est l'altitude à la base, OF est la bissectrice de l'angle BOD et l'angle $FOD = \Delta\lambda / 2$. Donc

$$DF / DO = \text{Sin } (\Delta\lambda / 2) / R,$$

et $DO = DF \cdot R / \text{Sin } (\Delta\lambda / 2) = \text{Sin } \varepsilon$. Al-Bīrūnī utilise sa valeur erronée de w pour obtenir $DF = w / 2 = 21,695$ secondes et $\text{Sin } \varepsilon =$

23;50,28, alors que l'utilisation de la valeur exacte de w donne $DF = 21,784$ secondes et $\sin \varepsilon = 23;56,20$.

Finalement, il obtient $\varepsilon = 23;24,46$ pour une valeur exacte égale à 23;30,51.

Les erreurs contenues dans les calculs d'al-Bīrūnī restent minimes et l'exactitude de ses résultats d'observations révèle son haut niveau de technicité.

Le livre d'al-Bīrūnī contient beaucoup de matière utile à l'étude de l'histoire de la trigonométrie. Cependant le lecteur doit garder à l'esprit que l'objectif d'al-Bīrūnī dans ce livre est de faire de la géographie mathématique, alors que dans son *Maqālid 'ilm al-hay'a*, il décrit le développement historique des méthodes trigonométriques (Kennedy, 1971).

Trois techniques pour déterminer la latitude locale lorsque le cercle de jour coupe l'horizon

Une première méthode considère trois segments de droites (des tiges) de même longueur pivotant ensemble autour du centre E du plan horizontal (figure 10). Chaque tige est orientée vers l'étoile observée à trois moments où elle est au-dessus de l'horizon.

On désigne par K, M les extrémités de deux de ces tiges et on prolonge la droite KM de sorte qu'elle coupe le plan horizontal en un point S .

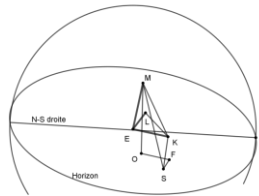


Figure 10 : Dispositif utilisé par al-Bīrūnī sur le plan horizontal¹⁴

Source : Auteur

¹⁴ La figure 10 est une correction de celle d'al-Bīrūnī qui est fautive et que la troisième tige est inutile si l'on suppose la ligne nord-sud connue.

A l'aide d'un fil à plomb, on détermine le pied O de la perpendiculaire issue de la troisième extrémité L et le point F tel que SF est perpendiculaire à EB et OF perpendiculaire à SF . Ainsi l'angle F dans le triangle rectangle OFL est φ , le complémentaire de la latitude locale.

Si l'observateur est sur l'équateur, alors $\varphi = 90^\circ$ et les plans de tous les cercles de jour sont orthogonaux au plan horizontal. Al-Bīrūnī observe que dans ce cas, les pieds des verticales issues des trois extrémités sont colinéaires. Il appelle, à juste cause, ces verticales sinus puisque si la longueur commune de ces tiges est considérée comme le rayon du cercle unité, chaque verticale (par exemple OL) est en effet le sinus de la latitude de la tige dont elle est issue (EL).

La seconde et la troisième technique sont très proches. Les deux sont basées sur des observations du soleil et non pas une étoile et emploient une grande surface sphérique fixée.

La deuxième méthode considère un hémisphère de base horizontale et la troisième méthode la sphère entière bien que dans cette dernière technique, seule l'hémisphère supérieur est utilisé.

Un dispositif est nécessaire dans les deux cas, pour déterminer, à tout moment de la journée, le point de passage du rayon du soleil sur la sphère. Les deux techniques diffèrent uniquement par ces deux objets (figure 11).

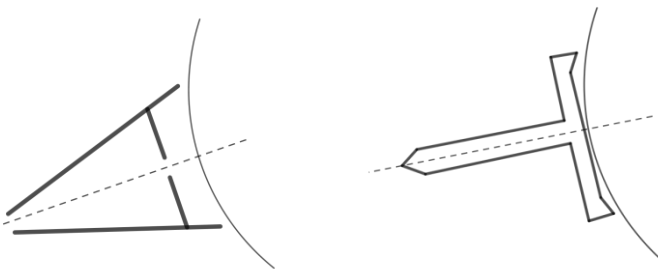


Figure 11 : Objets utilisés par al-Bīrūnī pour déterminer le point de passage du rayon du soleil sur la sphère

Source : Auteur

L'objet à droite de la figure 11 est un cône avec un orifice à son sommet et une plaque circulaire percée au centre et normale à l'axe du cône. Un ou plusieurs trous se trouvent sur sa surface latérale, proches de sa base et suffisamment larges pour permettre à l'observateur de voir la partie intérieure de la plaque de base et pouvoir insérer un dispositif de marquage par son centre.

La plaque de base est placée sur la sphère, sans la toucher, de sorte que son axe passe par le centre de la sphère. L'objet est actionné de la manière suivante : Bouger le cône jusqu'à ce que le rayon du soleil entre par l'axe et tombe sur le trou au centre du plateau. Marquer le point ainsi éclairé sur la sphère.

Cette trace représente sur la sphère, la carte de la position du soleil au moment de l'observation puisque l'opération est répétée deux autres fois au cours de la journée. Déterminer le pôle de cette carte. Alors la latitude de ce pôle est la latitude locale.

Le dispositif à gauche de la figure 11 est une tige droite avec une base circulaire plate à fond concave, normale à la tige. Ainsi lorsqu'il est placé sur la surface de la sphère, la tige (tout comme l'axe du cône précédent) est dans le prolongement du rayon de la sphère.

L'opération consiste à faire glisser la base jusqu'à ce que la tige, pointée vers le soleil, n'ait plus d'ombre, puis à marquer le tour du bord de la base. Le centre du petit cercle ainsi obtenu représente sur la sphère, la carte du soleil au moment de l'observation. Le procédé est ensuite répété deux autres fois au cours de la journée. La conclusion est la même que pour la deuxième technique.

Le premier dispositif décrit ici est assez difficile à mettre en pratique pour une personne non initiée à l'astronomie, le problème technique étant de fixer les trois tiges dans les directions désirées, alors que les deux autres méthodes sont à la portée de tous.

Bibliographie

Al-Battānī (1899-1907). *Sive Albatanii opus astronomicum*. (C. A. Nallino édit. & trad.), 2. Milan : Hoepli, p. 57.

Al-Bīrūnī (1948). *Maqāla fī istikhrāj al-awtār fī l-dā'ira* [Epître sur la détermination des cordes dans le cercle]. Dans *Rasā'il al-Bīrūnī*

[Epîtres d'al- Bīrūnī], Hyderabad : Osmania Oriental Publications Bureau.

Al-Bīrūnī (1954). *Al-Qānūn al-Masʿūdī*. Hyderabad : Osmania Oriental Publications Bureau, I, p. 366

Ali, J. (1967). *The Determination of the Coordinates of Cities, al-Bīrūnī's Taḥdīd al-amākin*. Beyrouth : Publications de l'université américaine de Beyrouth, pp. 26-28.

Al-Ziriklī. (1980) *Al-Aʿlām* [Les personnages illustres], Beyrouth, Dār al-ʿilm li l-malāyīn, 7, p. 301

Aristote (1952). *Meteorologica*, (Angl. H. D. P. Lee trad.), Cambridge mass : the Loeb classical library, pp. 179-185.

Berggren, J.-L. (2007). *Ibn ʿIrāq*. Dans Th. Hockey (édit.). *The biographical encyclopedia of astronomers*. New York : Springer.

Boilot, J. (1986). *Encyclopédie de l'Islam*, 1. Leiden : Brill,

Brockelmann, C. (1943). *Geschichte der arabischen literature*, S1, Leiden : Brill, p. 153.

Debarnot, M.-Th. (1985). *Kitāb maqālīd ʿilm al-hay'a, la trigonométrie sphérique chez les arabes de l'est à la fin du X^e siècle*. Damas : Institut français de Damas.

Djebbar, A. (1989). Al-Bīrūnī, mathématicien et savant polygraphe (X^e-XI^e siècles). Paris : Ed Jadīd al-cilm wa t-tiknulūjyā, (2).

Djebbar, A. (1990). Abū r-Rayḥān al-Bīrūnī : quelques aspects de sa vie et de son œuvre scientifique. *Revue arabe des technologies*, (2). Paris, p. 4, pp. 12-18.

Honigmann, E. (1992). Bemerkungen zu den geographischen tabellen al-Battānī's. *Rivista degli studi orientali*, (11) (1926-28), pp. 169-175. Réimpression dans *Islamic geography*, 23, 25-31.

Kennedy, E.-S. (1971). Al- Bīrūnī's maqālīd ʿilm al-hay'a. *Journal of near eastern studies*, (30), 308-314.

Kennedy, E.-S. (1973). *A commentary upon Bīrūnī's kitāb taḥdīd al-amākin, an 11th century treatise on mathematical geography*. Beyrouth : Publications de l'université américaine de Beyrouth, (15), 13-64 ; 84

Kennedy, E.-S. et Sharkas, H. (1962). Two medieval methods for finding the obliquity of the ecliptic. *The mathematics teacher*, (55), 286-290.

Kennedy, E.-S., & Muruwwa, A. (1958). Bīrūnī on the solar equation, *Journal of near eastern studies*, 112-121.

King, D.-A. & Samsó, J. (2002), *Zīdj. Encyclopédie de l'Islam*, 11. Leiden : Brill, vol.

Minorsky, V. (1937). *Ḥudūd al-^cĀlam* [Les régions du monde]. A persian geography 372 A. H. – 982 A. D., Oxford.

Ptolémée, C. (1813). *L'Almageste*. (Halma M. trad.). Paris : édition Henri Grand.

Suter, H. (1900). *Die mathematiker und astronomen der araber und ihre werke*. Leipzig : Teubner, p. 19.

Zimonyi, I. (2016). *Muslim Sources on the Magyars in the Second Half of the 9th Century* Brill, p. 8