Les cahiers du CRASC, n° 33, 2018, p. 103-116

Aperçu historique sur les sections coniques

Faiza REMAOUN-DJABEUR [1,2]

Introduction

Les sections coniques ont eu une place privilégiée dans le savoir mathématique. Ces courbes qui sont définies par les intersections de différents plans avec un cône, seront plus tard essentielles aux travaux de Kepler sur les orbites et de Galilée sur les projectiles.

On commencera avec un aperçu de la théorie des sections coniques dans le monde grec, en expliquant l'origine de ces courbes avec les travaux de Ménechme (-380/-340) suivis de ceux d'Apollonius de Perge (-262/-190) dont l'ouvrage constituera la référence essentielle des coniques pour les savants arabes.

Concernant le monde musulman, nous donnerons un aperçu général en citant l'exemple de « Kitāb al-Istikmāl » d'al-Mu'taman ibn Hūd (m. 1085).

[1] Université des Sciences et de la Technologie d'Oran - Mohamed-Boudiaf, 31 000, Oran, Algérie.
[2] Centre de Recherche en Anthropologie Sociale et Culturelle, 31 000, Oran, Algérie.

La naissance des coniques

Le problème de la duplication du cube est au centre de l'origine des coniques.

Nous n'avons aucune information sur le ou les inventeurs de la théorie des sections coniques par contre, par Eutocius d'Ascalon (VIème s.), nous sommes mieux informés sur leur première utilisation par Menechme (IVème s. avant J.-C.). En effet, Eutocius dans son « commentaire sur le Second Livre du Traité d'Archimède sur la Sphère et le Cylindre » le crédite des solutions du célèbre problème des deux moyennes proportionnelles à l'aide des coniques[1].

Ce problème est connu surtout à cause de son application au problème de la duplication du cube.

Le problème des deux moyennes proportionnelles, attribué à Hippocrate[2], consiste à construire deux segments de longueurs x et y tels que $a/x=x/y=y/b$, à partir de deux segments de longueurs a et b. Un cas particulier lié au problème de la duplication du cube est quand $b=2a$. Dans ce cas $a/x=x/y=y/2a$. Ce problème renvoie aux égalités suivantes : $x^2 = ay$ et $y^2 = 2ax$ et la solution x du système est telle que $x^3 = 2a^3$. Dans la recherche d'une courbe satisfaisant la condition $y^2 = px$, expression écrite en langage moderne, Ménechme introduit la parabole[3]. Cette nouvelle courbe, obtenue comme section d'un cône circulaire droit par un plan perpendiculaire à une génératrice, fut appelée à cette époque « section du cône

[1] Heath, Th. (1981), *A History of Greek Mathematics*, New York, Dover, vol. I, p. 251-252.
[2] Hippocrate de Chios : Mathématicien grec de la seconde moitié du Ve siècle av. J.-C.
[3] Bouzari, A. (2008), *La géométrie des coniques dans la tradition de l'Occident Musulman à travers le Kitāb al-Istikmāl [Livre de l'accomplissement] d'al-Mu'taman (m. 1085)*, thèse de doctorat, Université de Lille.

droit rectangle » ou « orthotome » et plus tard nommée « parabole ». L'introduction de cette courbe a permis de donner une solution au problème de la duplication du cube.

Selon un passage de Geminus, cité par Eutocius, au temps de Ménechme on engendrait le cône par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit. Il est possible que Ménechme ait conçu les coniques comme sections de cônes circulaires droits par des plans perpendiculaires à une génératrice. Selon l'angle d'ouverture au sommet, on a trois types de cône de révolution. Bien que l'ellipse ne soit pas présente dans les travaux attribués à Ménechme, on peut supposer qu'il la connaissait puisque Eratosthène appelle les coniques «triade ménechmienne»[4].

Jusqu'à l'époque d'Archimède (m. 212 avant J.-C), la génération des sections coniques était obtenue à partir de trois cônes droits distincts que l'on coupait par un plan perpendiculaire à leur génératrice.

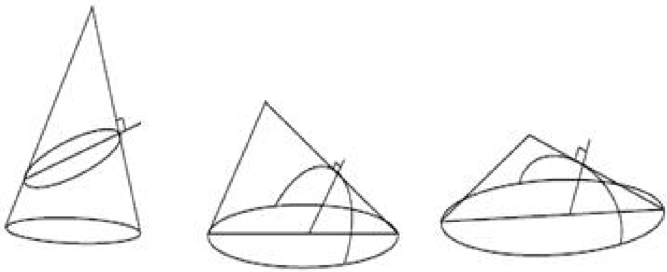
La section du cône acutangle (**ellipse**) est obtenue à partir d'un cône acutangle que l'on coupe par un plan perpendiculaire à une génératrice [fig. 1.a.].

La section du cône rectangle (**parabole**) est obtenue à partir d'un cône droit que l'on coupe par un plan perpendiculaire à une génératrice [fig. 1.b.].

La section du cône obtusangle (**hyperbole**) est obtenue à partir d'un cône obtusangle que l'on coupe par un plan perpendiculaire à une génératrice [fig. 1.c.][5].

[4] Bongiovanni, V. (2007), « Etude historique des premières caractérisations des coniques », Revista Brasileira de Historia da Matemàtica Especial, n° 1, Festschrift Ubiratan d'Ambrosio, p. 441.
[5] Bouzari, A. (2008), *op.cit*.

Figure 1



1.a. 1.c. 1.b.

Les coniques chez Apollonius

Apollonius (262-190 avant J.-C.), géomètre grec, est célèbre surtout pour son traité sur les coniques, contenant, non seulement ce qui était connu par Ménechme, Aristée[6] et Euclide, mais aussi par des résultats qui lui sont personnels.

A l'heure actuelle, Sept des huit livres de son traité sur les sections coniques nous sont parvenus en langue arabe. Les quatre premiers existent aussi en grec, tandis que les trois derniers nous ont été transmis uniquement en langue arabe. La version arabe datant du IX^{ème} siècle a permis une traduction en latin, au XVI^{ème} siècle. Le huitième livre est perdu mais une reconstruction a été faite par le mathématicien arabe Ibn al-Haytham (m.ca.1041).

Les livres I à IV rassemblent, coordonnent et enrichissent les connaissances acquises par ses prédécesseurs sur les sections coniques. Le reste du traité contient essentiellement des contributions originales pour son époque.

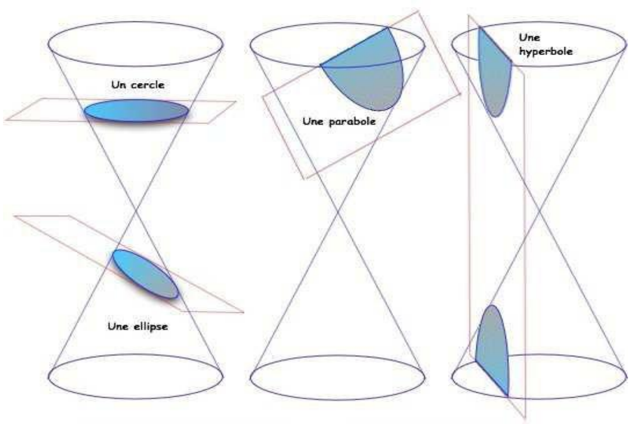
Les premières définitions du livre I, nous proposent une nouvelle manière de concevoir la génération du cône. Il

[6] Aristée l'Ancien : mathématicien de la Grèce antique contemporain d'Euclide.

considère un cercle C et un point A dans deux plans différents. Par le point A il fait passer une droite à la circonférence du cercle qu'il fait mouvoir autour de cette dernière jusqu'à ce qu'elle revienne à son point de départ. Cette nouvelle façon d'engendrer le cône, le démarque de ses prédécesseurs qui considéraient le cône comme étant le solide engendré par un triangle rectangle tournant autour de l'un des côtés de l'angle droit[7].

Avec sa nouvelle définition, Apollonius unifie pour la première fois, la génération de toutes les sections coniques, en coupant sa surface conique (qui est constituée de deux nappes) par des plans quelconques non nécessairement perpendiculaires à l'une des nappes. Il obtient ainsi les trois sections que nous connaissons et qu'il appelle : ellipse, parabole et hyperbole (avec ses deux sections opposées). Puis il expose les définitions et les propriétés des éléments caractéristiques de ces trois courbes : les diamètres, les lignes ordonnées, les sommets…

Figure 2



[7] Roshdi, R. (2008), *Apollonius de Perge, Coniques*, t. 1.1, Livre I, Walter de Gruyter, Berlin ; New York, p. 7.

La nouvelle terminologie introduite par Apollonius pour désigner les trois courbes semble être liée au procédé d'application des aires et non à la génération de courbes comme sections du cône[8]. C'est du moins l'explication admise dans la tradition arabe, comme cela est confirmé par la terminologie utilisée pour les trois courbes. En effet al-qaṭᶜ al-mukāfī' (la parabole) signifie la section équivalente, al-qaṭᶜaz-zā'id (l'hyperbole) signifie la section excédente et al-qaṭᶜal-nāqiṣ (l'ellipse) signifie la section déficiente.

Pour expliciter ces termes, revenons aux caractérisations des trois courbes.

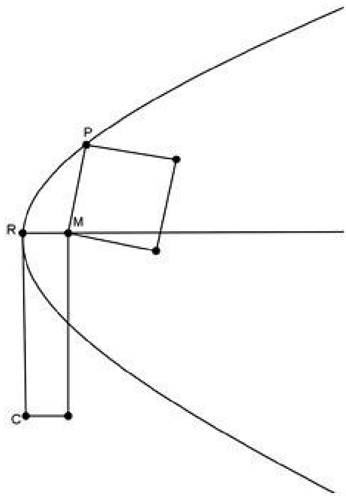
Soit une conique de sommet R et de diamètre (D), soit M un point de cette conique tel que MP soit une ligne ordonnée par rapport au diamètre (D) et soit RC une longueur donné (paramètre).

La parabole

Apollonius caractérise la parabole dans la proposition [C ; I : 11] par $MP^2=RC.MR$. Ceci signifie que si on applique le carré de côté MP sur la droite RC, la largeur produite est MR.

[8] Decorps-Foulquier, M. (2000), *Les catoptriciens Grecs*, Rashed, R. (trad.), Walter de Gruyter, p. 21.

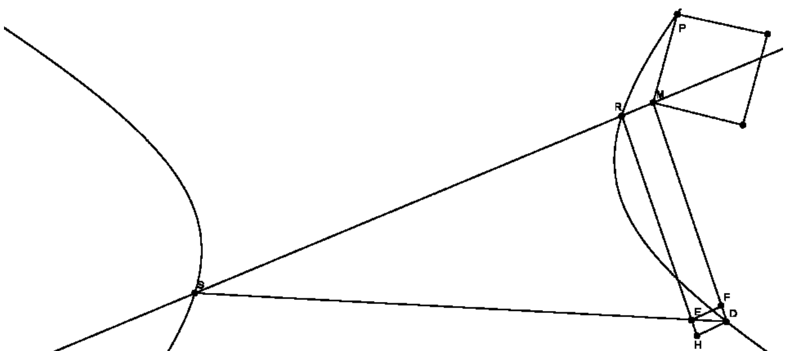
Figure 3



L'hyperbole

Apollonius caractérise dans la proposition [C ; I : 12] l'hyperbole par $MP^2=RM.RE+RM.FD$. Ce qui signifie que la surface du carré de côté MP est égale à une surface qui excède le rectangle $RM.RE$ d'une surface ($RM.FD$).

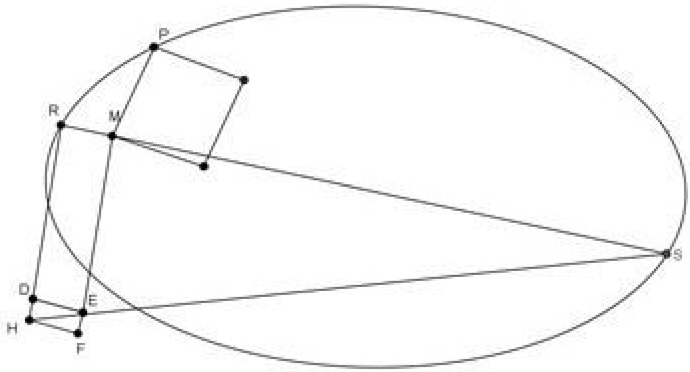
Figure 4



L'ellipse

Apollonius caractérise dans la proposition [C ; I : 13] l'ellipse par $MP^2=RM.MF-RM.FE$. Ce qui signifie que la surface du carré de côté *MP* est égal à une surface qui est déficiente par rapport à *RM.MF* d'une surface (*RM.FE*).

Figure 5



Les coniques dans la tradition arabe

Les travaux grecs relatifs aux sections coniques sont parvenus aux scientifiques en pays d'Islam essentiellement à travers les coniques d'Apollonius. Les premiers mathématiciens connus qui se sont préoccupés des coniques sont les frères Banū Mūsa, Aḥmad, al-Ḥasan et Moḥammad. A la mort de leur père, ils auraient été élevés par al-khalīf al-Ma'mūn (813/833) qui aurait assuré leur formation scientifique. Devenus adultes, ces trois frères se sont distingués par leur compétence dans différents domaines scientifiques, par leur persévérance dans la recherche des manuscrits et, surtout, par leur financement généreux de traductions d'ouvrages scientifiques grecs en langue arabe.

C'est précisément sous leur direction que la traduction des coniques a été réalisée.

- Livres I-IV: Hilāl ibn AbīHilāl al-Ḥimṣī (III^{e}/IX^{e})
- Livres V-VIII: Thābit ibn Qurra (m. 289/901)
- Reconstitution du livre VIII par Ibn al-Haytham « maqāla fī itmām kitāb al-makhrūṭāt »[9].

L'étude des sections coniques en pays d'Islam a été entreprise non seulement à cause des problèmes géométriques hérités de l'antiquité comme la duplication du cube, mais surtout en vue de leur application à des domaines non prévus par les premiers mathématiciens comme l'optique, la statique et l'astronomie. De cet intérêt a résulté le développement de la recherche sur les coniques.

Quelques Mathématiciens de langue arabe ayant travaillé sur les coniques

L'orient musulman

- Ibrāhim ibn Sinān (908-946) : il a écrit « livre sur la construction des trois sections » où il traite des méthodes pour générer les trois sections.
- Al-Khāzin (900-971) : « livre des coniques »
- Al-Kūhi (X^{e}) : « traité sur le compas parfait » (il conçoit un instrument servant à tracer les coniques d'un mouvement continu).
- As-Sijzī (945-1020) : « épître sur la description des sections coniques », « épître sur les propriétés de l'ellipse »
- Al-Khayyām (m. 1131) : construction géométrique des racines des équations de degré inférieur ou égal à

[9] Roshdi, R. (1996), *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. 3, Al-Furqān, Islamic heritage foundation, Londres.

3 au moyen des coniques et résolution numérique de ces équations.

L'occident musulman

- Ibn as-Samḥ (426/1035).
- Ibn Sayyid (V^{e}/XI^{e}).
- Al-Mu'taman ibn Hūd (m 1085) : **"kitāb al-Istikmāl"**

L'auteur de cet ouvrage est AbūAmīrYūsuf Ibn Aḥmad Ibn Sulaymān Ibn Muḥammad Ibn Hūd al-Judhamī as-Saraqusṭī, plus connu par son titre honorifique d'al-Mu'taman [Le dépositaire de la confiance <de Dieu>]. Il est considéré aujourd'hui, après l'exhumation d'une partie de de la tradition scientifique de l'Andalus du XIe siècle. Les sources biobibliographiques et historiques accessibles ne nous rapportent que peu d'informations sur sa vie, et celles qui sont fournies concernent essentiellement son profil de dauphin puis de roi de Saragosse. Il régna sur sa province de 473/1081 jusqu'à sa mort en l'an 478/1085[10].

Al-Mu'taman avait imaginé le contenu de son livre en deux parties matérialisées, chacune, par un volume indépendant. Cette division devait correspondre aux deux « genres », théorique et pratique, des sciences mathématiques. La matière du premier volume nous est désormais connue dans le détail et nous disposons de la table des matières du second.

La première partie, intitulée al-jins al-awwal min al-ᶜulūm al-riyāḍiyya [premier genre des sciences mathématiques], est divisée en espèces, chaque espèce en sous espèces, chaque sous espèce en sections et chaque section comporte en moyenne vingt propositions et parfois des définitions, des axiomes ou des notions communes.

[10] Bouzari, A. (2009), L*es coniques en Occident Musulman entre le XI^{e} et le XIV^{e} siècles*, LUL, vol. 32, p. 233-255.

Voici la structure du premier volume :

- Espèce 1 : Arithmétiques (90 propositions)
- Espèce 2 : Géométrie plane (61 propositions)
- Espèce 3 : Géométrie plane (124 propositions)
- Espèce 4 : Géométrie stéréométrique (134 propositions)
- Espèce 5 : Géométrie stéréométrique (35 propositions)[11].

La partie qui concerne les coniques se trouve dans la troisième sous espèce de la quatrième espèce. Elle est composée de deux sections : la première contenant 27 propositions qui ont déjà était éditées par A. Bouzari et la seconde, qui est en cours d'édition, contient 23 propositions.

Conclusion

L'étude des sections coniques dans la civilisation Arabo-musulmane ne s'est pas contentée de reprendre les problèmes géométriques hérités des Grec (comme la duplication du cube) mais a servi à être appliquée à des domaines non prévus par les premiers mathématiciens comme l'optique, la statique, l'astronomie et l'algèbre.

Les travaux de recherches des historiens des mathématiques spécialisés dans l'occident musulman tel qu'A. Djebbar et J.P. Hogendijk ont montré que l'étude des sections coniques n'a pas été exclusive à l'orient musulman, l'Andalousie a vu au XI[ème] siècle l'émergence de brillants mathématiciens travaillant sur ce domaine tel que le roi mathématicien al Mu'taman Ibn Hūd.

Concernant l'enseignement des coniques aujourd'hui, dans les rares cas où l'on y fait allusion, cela se résume à des équations polynomiales du second degré. L'introduction

[11] Hogendijk, J.-P. (1991), *The geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11[th] century), an analytical table of contents.* Archives Internationales d'Histoire des Sciences, Estratto dal, n° 127, vol.41.

de l’outil historique pour l’étude de ces objets mathématiques pourrait constituer un support pédagogique pour élargir les compétences des élèves de lycée en géométrie. En effet, l’approche géométrique de coniques nous parait plus accessible aux enseignés car relevant de l’intuition pour une bonne part. L’histoire, d’ailleurs nous montre que les savants grecs et arabes ne se contentaient pas d’équations polynomiales et tentaient non seulement de voir figurer sur le plan de telles coniques mais aussi, comme les mathématiciens arabes, ils ont réalisé des méthodes pour tracer sur le plan des paraboles et autres ellipses. Ainsi, si l’histoire des sciences se met au service d’approches pédagogiques, il y a à parier que la transmission de concepts mathématiques soit moins source d’obstacles épistémologiques.

Figure 6 : Première page de la deuxième section de la troisième sous espèce de la quatrième espèce de *Kitāb al-Istikmāl* d'al-Mu'taman ibn Hūd (manuscrit de Copenhague, Royal Library, Or. 82).

Bibliographie

Apollonius de, P. (1959), *Les coniques*, Ver Eeck, P. (trad), Paris, Blanchard.

Bongiovanni, V. (2007), *Etude historique des premières caractérisations des coniques*, Revista Brasileira de Historia da Matemàtica Especial n° 1, Festschrift Ubiratan d'Ambrosio.

Bouzari, M. (2010), *Contribution de l'occident musulman au développement des mathématiques : L'exemple des sections coniques,* Printemps de Cirta, Eclosions mathématiques et philosophiques.

——————— (2009), *Les coniques en Occident Musulman entre le XIème et le XIVème siècles,* LUL, vol. 32, p. 233-255.

Bouzari, A. (2008), *La géométrie des coniques dans la tradition de l'Occident Musulman à travers le Kitāb al-Istikmāl [Livre de l'accomplissement] d'al-Mu'taman (m. 1085)*, thèse de doctorat, Université de Lille.

——————— (1997), *L'optique géométrique*, Rashed, R. (édit.) : *Histoire des sciences arabes*, Seuil, vol. II, Paris.

Decorps-Foulquier, M. (2000), *Les catoptriciens Grecs*, traduction de Roshdi Rashed, Walter de Gruyter.

Heath, Th. (1981), *A History of Greek Mathematics*, New York, Dover, vol. I, p. 251-252.

Hogendijk, J.-P. (1991), *The geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century), an analytical table of contents.* Archives Internationales d'Histoire des Sciences, Estratto dal, n° 127, vol. 41.

Roshdi, R. (2008), *Apollonius de Perge, Coniques*, t. 1.1, Livre I, Walter de Gruyter, Berlin ; New York.