Les cahiers du CRASC, n° 33, 2018, p. 17-79

Outils de justification et procédés de résolution dans les mathématiques arabes*

Ahmed DJEBBAR [(1,2)]

Introduction

Les sources mathématiques arabes[1] qui nous sont parvenues, et qui ont fait l'objet d'étude, montrent que les activités des praticiens et des spécialistes de ce vaste champ du savoir ont connu trois orientations principales. La première, héritée essentiellement de la tradition grecque, est celle de l'établissement de propositions théoriques à l'aide de différents outils de la démonstration. Dans le prolongement

---

* Le contenu de cette contribution repose, en grande partie, sur deux études antérieures réalisées dans le cadre de nos recherches sur l'Histoire des mathématiques arabes. Cf. Djebbar, A. (1998), « Le raisonnement géométrique dans la tradition mathématique arabe (IX^e-XV^e siècles) », Actes du colloque international *Le raisonnement géométrique : enseignement et apprentissage* (Marrakech, E.N.S., 28-30 mai 1997), Marrakech, Imprimerie Walili, p. 89-121 ; Djebbar, A. (2000), « La place et le rôle de l'imagination dans les activités mathématiques de la tradition arabe médiévale », Actes du colloque international sur *Imagination and Sciences* (Rabat, 1998), Benmaïssa, A. (édit.), Rabat, Publications de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines, p. 153-176.

(1) Professeur émérite, Université de Lille, France.

(2) Centre de Recherche en Anthropologie Sociale et Culturelle, 31 000, Oran, Algérie.

1 Par « mathématiques arabes », on entend ici l'ensemble des activités liées à cette discipline (traduction, enseignement, publication) qui ont été réalisées en langue arabe par des hommes de sciences ayant vécu en pays d'Islam et dont le vécu pouvait se distinguer sur les plans linguistiques, confessionnels et culturels.

de ce type d'activités, quelques spécialistes de haut niveau ont produit des réflexions originales sur les différentes manières de justifier un résultat mathématique. La seconde orientation est celle qui a concerné la géométrie pratique, avec les différents procédés de mesurage et de découpage des figures. La troisième, qui a puisé, d'une manière directe ou indirecte, dans les héritages chinois, indiens et mésopotamiens, est celle de la résolution de problèmes arithmétiques. Pour obtenir des solutions, les praticiens de ce domaine ont utilisé des procédés qui ne faisaient pas intervenir des démonstrations. Ils se contentaient de valider les solutions obtenues par des vérifications ou par l'utilisation de figures géométriques qui permettaient de visualiser les différentes étapes de la procédure.

L'étude qui va suivre se propose de présenter et d'analyser le contenu de ces différentes orientations en mettant en lumière l'apport des héritages anciens, les demandes sociétales (religieuses ou profanes) qui sont à l'origine du développement de telle ou telle pratique mathématique et, bien sûr, les contributions connues de grands savants ou de simples praticiens de la civilisation arabo-musulmane dans le cadre de leurs activités mathématiques.

Les différents procédés de justification

Le raisonnement inductif

Au sujet de l'induction, il faut tout de suite préciser que, bien avant la traduction des écrits philosophiques et mathématiques grecs, les linguistes et les grammairiens arabes, comme al-Khalîl Ibn Ahmad (m. vers 786), utilisaient, dans leurs analyses des structures de la langue et de la poésie arabe, une forme d'induction qui consistait à examiner, l'un après l'autre, tous les éléments d'un ensemble pour en dégager une propriété ou une règle générale. Cela correspond d'ailleurs à l'étymologie du mot *Istiqrâ'* par lequel on désignait cette opération.

Mais, l'induction mathématique diffère à la fois de celle des linguistes et de celles des philosophes. Ces derniers ont défini deux formes d'induction : al-istiqrâ' al-tâm [l'induction complète] et *al-istiqrâ' al-nâqis* [l'induction incomplète]. Les démarches inductives des mathématiciens sont basées sur le même principe qui régit celles des philosophes, c'est-à-dire l'extension d'une propriété, vérifiée sur un sous-ensemble fini, à un ensemble dénombrable fini ou non. Mais elles sont plus riches et elles revêtent plusieurs formes qui s'appuient toutes sur des raisonnements déductifs sans lesquels elles se réduiraient d'ailleurs à une série de vérifications sans grand intérêt.

On a longtemps cru et affirmé que les premières formes d'induction mathématique étaient apparues en Europe avec les travaux de Levi Ben Gerson (m. 1344) et, plus tard, ceux de Maurolico (m. 1575). En fait, l'analyse des travaux d'al-Karajî (m. 1029), d'al-Samaw'al (m. 1175)[2], d'Ibn Mun^{c}im (m. 1228) et d'Ibn al-Bannâ' (m. 1321)[3] montre clairement que les recherches commencées au centre de l'empire musulman, et poursuivies en Andalus et au Maghreb, ont permis de dégager plusieurs formes d'induction : la *définition inductive*, la r*égression*, le *raisonnement quasi-général* et *l'induction amplifiante*.

Quant à la combinatoire, elle a permis aux mathématiciens arabes d'élaborer graduellement un type de démonstration qui associe différentes formes d'induction, des méthodes

[2] Djebbar, A. (1980), *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles*, Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 81-02, p. 55-112.

[3] Djebbar, A. (1985), *L'analyse combinatoire dans l'enseignement d'Ibn Mun^{c}im*, Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 85-01, p. 11, 33, 77, 108.

arithmétiques et des procédés de dénombrement. Cette diversité, longtemps éparpillée au gré des problèmes particuliers abordés par les chercheurs, se trouve unifiée, pour la première fois à notre connaissance, dans un ouvrage maghrébin, le *Fiqh al-hisâb* [la science du calcul] d'Ibn Mun^{c}im qui y consacre un chapitre particulier[4].

L'intérêt du raisonnement combinatoire ne réside pas, comme on le voit, dans son originalité, mais plutôt dans le fait qu'il était le produit d'une mathématique qui se réalisait au jour le jour. Ce qui pouvait lui éviter les carcans d'une tradition figée et lui permettre d'acquérir très vite un statut d'instrument théorique à part entière. S'il n'a pas acquis ce statut dans les mathématiques arabes, cela est dû probablement à la faiblesse du développement quantitatif de la combinatoire après le XIV^{e} siècle, pour des raisons extérieures à la science, c'est-à-dire, celles-là mêmes qui condamneront d'abord la philosophie puis les mathématiques à une longue hibernation.

Le raisonnement géométrique

A la lecture de ce qui nous est aujourd'hui accessible du corpus scientifique arabe produit entre le IX^{e} et le XV^{e} siècle, on constate que le raisonnement géométrique et, plus généralement, la justification géométrique sous ses différentes formes, sont intervenus dans la plupart des disciplines de ce corpus. En effet, en plus de la géométrie, avec ses chapitres classiques, c'est à dire celle de la mesure euclidienne ou archimédienne, celle des figures planes ou sphériques et celle des coniques, il y a la trigonométrie, l'astronomie théorique et appliquée, l'optique et, dans une moindre mesure, la mécanique. Mais il y a aussi des disciplines connues aujourd'hui pour être très éloignées de la géométrie, comme l'algèbre, la science du calcul et la théorie des nombres.

[4] Djebbar, A. (1980), *op.cit.*, p. 6-40.

En premier lieu, nous évoquerons le contexte scientifique, et plus particulièrement celui des mathématiques, dans lequel vont intervenir les différents types de raisonnement, et ce, en relation avec les conceptions dominantes dans les milieux spécialisés de l'époque. En second lieu, nous présenterons les informations en notre possession concernant les sources préislamiques qui ont nourri et qui ont profondément marqué la pratique des mathématiciens arabes dans le domaine du raisonnement, de la justification ou, tout simplement, de l'utilisation de la Géométrie comme support visant à emporter la conviction à propos de règles ou de procédés non géométriques. En troisième lieu, nous passerons en revue les différents types d'intervention de ces raisonnements dans certaines des disciplines que nous venons d'évoquer, en distinguant deux niveaux importants : celui, plus courant, où ces raisonnements interviennent comme outils, pour la résolution de certains problèmes ou pour la validation de leurs solutions, et celui où ils interviennent comme objets d'étude dans le cadre d'une réflexion sur la géométrie, sur ses méthodes et sur ses buts.

Le contexte de l'avènement et du développement du raisonnement géométrique

Avant d'aborder les différents aspects du raisonnement géométrique qu'il nous a été possible de repérer dans les écrits scientifiques arabes, il nous semble utile d'esquisser les grandes lignes et les grandes orientations des activités mathématiques qui se sont développées entre le IX^{e} et le XV^{e} siècle et dans lesquelles sont intervenus ces raisonnements.

La première orientation a consisté à assimiler les traités classiques des traditions indiennes et grecques tout en continuant, pour certains praticiens du moins, à utiliser une certaine mathématique locale, héritée en partie des Babyloniens.

Puis, armés des nouveaux outils théoriques grecs et imprégnés des démarches algorithmiques indiennes ou locales, les premiers mathématiciens ont procédé à une lecture critique des textes traduits qui a abouti à certaines initiatives fécondes. A titre d'exemple, on peut d'abord citer l'arithmétisation du Livre X des *Eléments* d'Euclide qui a permis la manipulation des irrationnels quadratiques et une première extension de la notion de nombre[5]. Il y a eu ensuite la reformulation de la notion de rapport du Livre V qui a abouti, à la fin du XI^{e} siècle, à la définition et à la justification d'une notion de nombre encore plus large puisqu'elle correspondait, dans les faits, à la manipulation de ce qui est appelé, aujourd'hui, le *nombre réel positif*[6]. Parallèlement, de riches discussions entre spécialistes ont porté sur la validité du postulat des parallèles ainsi que sur les différentes tentatives de

[5] Ce livre géométrique étudie les binômes et les apotomes qui sont des grandeurs que l'on exprime aujourd'hui ainsi : $m+\sqrt{n}$, $-\sqrt{n}$, $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, $\sqrt{m}-\sqrt{n}$. Dès le milieu du IXe siècle, des algébristes, comme al-Mâhânî, étendront cette étude à des grandeurs de la forme : $m^{\frac{1}{2p}}+m^{\frac{1}{2q}}$, $m^{\frac{1}{2p}}-m^{\frac{1}{2q}}$, et à d'autres, sans tenir compte de leurs supports géométriques, et ils les introduiront, aux côtés des entiers et des rationnels, dans les résolutions d'équations. Cf. Al-Mâhânî : *Tafsîr al-maqâla al-^{c}âshira min kitâb Uqlîdis* [Explication du dixième Livre du traité d'Euclide], Ms. Paris, B.N., n° 2457, ff. 180b-181b.

[6] L'un des travaux les plus originaux dans ce domaine a été réalisé par cUmar al-Khayyâm dans sa *Risâla fî sharh mâ ashkala min musâdarât Uqlîdis* [Épître sur l'explication des prémisses problématiques d'Euclide]. Cf. Khayyam (AL-) (1961), *^{c}Umar al-Khayyâm, Musâdarat Uqlîdis* [^{c}Umar al-Khayyam, les prémisses d'Euclide], A. I. Sabra (édit.), Alexandrie, ff.74a-82a. Cf. Aussi Djebbar, A. (1997), *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al-Khayyâm (1048-1131) « Sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide ».* Introduction et traduction française, Paris, Université de Paris-Sud, Prépublications Mathématiques d'Orsay, n° 97-38. A peu près à la même époque, en Andalus cette fois, Ibn Mu^{c}âdh al-Jayyânî abordait ce problème dans sa *Maqâla fî sharh al-nisba* [Livre sur l'explication du rapport], Cf. Plooij, E. B. (1950), *Euclid's Conception of Ratio and his definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators*, Rotterdam.

démonstration de ce postulat[7] et, enfin, l'analyse des différentes formes du raisonnement géométrique, héritées des Grecs, qui a abouti à la rédaction d'ouvrages consacrés exclusivement à ces raisonnements en tant qu'outils.

La seconde orientation a concerné la résolution de problèmes non résolus par les Anciens (c'est-à-dire les mathématiciens grecs) ou dont la résolution a été jugée non satisfaisante. Il en est ainsi, par exemple, de la proposition IV du Livre II de *la Sphère et du cylindre* d'Archimède, du problème de la multisection d'un angle et de celui de l'inscription de polygones réguliers dans le cercle[8].

La troisième orientation a visé la résolution de problèmes nouveaux, comme ceux qui ont été exprimés sous forme d'équations, ainsi que l'établissement de propositions géométriques ou trigonométriques inexistantes dans les traditions mathématiques antérieures.

Les recherches qui ont été initiées, à cette époque, en géométrie, répondaient en partie à des besoins réels de la société et, en partie, à des exigences internes à la tradition mathématique elle-même. Dans le domaine des sciences appliquées, on peut citer les traités des frères Banû Mûsa (IX^e^ s.) et d'Abû l-Wâfa' (m. 997) en géodésie et en arpentage[9],

---

[7] Parmi les savants qui ont contribué à ces travaux, on peut citer, dans l'ordre chronologique, al-Nayrîzî et Thâbit Ibn Qurra au IXe siècle, Ibn al-Haytham et cUmar al-Khayyâm au XIe, Nasîr al-Dîn al-Tûsî et Muhyî al-Dîn al-Maghribî au XIIIe. Pour plus de détails, cf. Jaouiche, K. (1986), *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Paris, Vrin, p. 31-106.

[8] Algébrisés, ces problèmes aboutissaient à des équations du 3e degré. Cf. Anbouba, A. (1978), « Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4e siècle de l'Hégire », *Journal for the History of Arabic Science*, p. 264-269. Cf. également Youschkevitch, A.-P. (1976), *Les mathématiques arabes*, Paris, Vrin, p. 93-94.

[9] Hasan (al-), A.-Y. (1981), *Kitâb al-hiyal* [Livre des procédés ingénieux], Alep, I. H. A. S., L'ouvrage d'Abû l-Wafâ' a pour titre : *Kitâb fî mâ yahtâju ilayhi al-sânic min al-acmâl al-handasiyya* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en contructions géométriques], cA. Al-cAli (édit.), Bagdad, Markaz ihyâ' al-turâth al-

ceux d'Ibn al-Haytham (m. 1041) et d'al-Fârisî (m. 1320) en optique géométrique[10], d'al-Jazarî (m. 1206) et de Taqiyy ad-Dîn Ibn Ma^{c}rûf (m. 1585) en géométrie mécanique[11], d'al-Kâshî (m. 1429) en architecture[12] et, enfin, les travaux d'al-Bîrûnî (m. 1048) et d'al-Hasan al-Murrâkushî (XIII^{e} siècle) sur la géométrie intervenant dans la conception et dans la réalisation matérielle d'un grand nombre d'instruments astronomiques servant, en particulier, à résoudre des problèmes liés aux pratiques cultuelles des Musulmans[13].

Dans le domaine théorique, on peut dégager trois tendances essentielles qui ne concernent pas exclusivement la géométrie d'ailleurs, mais qui y sont apparus et qui ont, par la suite, bénéficié des progrès de l'algèbre. La première est partie des problèmes de la tradition grecque sur la constructibilité des points et des figures du plan. C'est après avoir été souvent confrontés à des problèmes non constructibles que les mathématiciens arabes ont été amenés à élargir la notion d'existence géométrique ou algébrique, par

^{c}ilmî al-^{c}arabî, 1979. Cf. Woepcke, F. (1855), « Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafa », *Journal Asiatique*, 5, p. 218-256 et 309-359.

10 Nazîf, M. (1942-1943), *Al-Hasan Ibn al-Haytham buhuthuhu wa kushufuhu al-basariyya* [Al-Hasan Ibn al-Haytham, ses recherches et ses découvertes en optique], Le Caire, vol. I et II.

11 Hasan (al-), A.-Y. (1976), *Al-Jâmi^{c} bayna l-^{c}ilm wa l-^{c}amal*, [Livre qui réunit la théorie et la pratique], Alep, I. H. A. S. ; Hasan (al-), A.-Y. (1976), *Taqiyy al-Dîn wa-l-handasa al-mîkânîkiyya al-^{c}arabiyya*, [Taqiyy ad-Din et la géométrie mécanique arabe], Alep, I.H.A.S..

12 Al-Kâshî, *Miftâh al-hisâb* [La clé de l'Astronomie], Damirdash, A.-S. et Al-Hafni, M. H. (édit.) (1967), le Caire, p. 176-188.

13 Al-Bîrûnî, *Kitâb fî istî^{c}âb al-wujûh al-mumkina fî san^{c}at al-asturlâb* [Livre exhaustif sur les procédés possibles de construction de l'astrolabe], Ms. Leiden, Or. 591/4^{e}. Murrakushi (al-) : *Jâmi^{c} al-mabâdi' wa l-ghâyât fî ^{c}ilm al-mîqât* [Recueil des principes et des buts sur la science du temps], Ms. Paris n° 2507-2508. Cf. Aussi Sedillot, J.-J. (1834-1835), *Traité des instruments astronomiques des Arabes*, vol. 1-2, Paris, éd. de l'Imprimerie Royale. Réédition en fac-simile par Sezgin, F. (1984), Frankfurt, éd. de l'Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, p. 19-55.

l'utilisation systématique des sections coniques. Cela a abouti, en particulier, aux travaux commencés par Abû l-Jûd (Xe siècle), poursuivis par al-Kûhî (Xe siècle) et achevés par al-Khayyâm (m. 1131), en vue d'établir une théorie géométrique des équations cubiques[14].

La seconde de ces tendances a concerné l'étude des courbes pour elles-mêmes dans le but d'en connaître les propriétés les plus accessibles, compte tenu des instruments théoriques dont on disposait alors. Cet aspect des recherches géométriques arabes est le moins bien connu à cause de la disparition de certains travaux fondamentaux. Mais l'ignorance de ces contributions a amené certains spécialistes en histoire des sciences à décréter, tout simplement, que les mathématiciens arabes n'avaient pu réaliser aucun progrès en géométrie et qu'ils étaient même restés en deçà du niveau de l'héritage grec dans ce domaine[15].

Pourtant, au vu des textes qui nous sont parvenus, comme celui de Thâbit Ibn Qurra (m. 901) sur les ellipses, ou celui d'al-Sijzî (Xe siècle) sur les hyperboles et, surtout, au vu des témoignages dignes de foi comme celui d'al-Khayyâm, relatif aux travaux perdus d'Ibn al-Haytham ou celui du philosophe Ibn Bâjja (m. 1138) sur les travaux d'Ibn Sayyid (XIe siècle) consacrés aux courbes de degré supérieur à deux, il parait désormais incontestable que des progrès significatifs ont été réalisés dans ce domaine, même si des facteurs extérieurs aux mathématiques ont provoqué la rupture de cette tradition géométrique féconde qui a dû attendre parfois le XVIIe siècle pour renaître dans un contexte différent[16].

---

[14] Djebbar, A. et Rashed, R. (1981), *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*, Alep, éd. de l'Institut d'Histoire des Sciences Arabes, p. 11-90.

[15] Massignon, L. et Arnaldez, G. (1957), « La science arabe », Taton, R., *Histoire générale des sciences*, vol. I, Paris, p. 449-459.

[16] Karpova, L. et Rosenfeld, B. (1974), « The treatise of Thâbit Ibn Qurra on section of cylinder and on its surface », *Archives Internationales d'Histoire des*

La troisième voie suivie par les recherches géométriques arabes est celle qui s'est attachée à résoudre des problèmes de mesure, à l'aide de méthodes et de techniques infinitésimales. Bénéficiant partiellement des écrits d'Archimède, ces recherches ont débuté par les travaux des frères Banû Mûsâ sur « *la détermination des surfaces des figures planes et sphériques* » comme l'indique le titre de leur ouvrage collectif[17]. Elles ont été poursuivies par Thâbit Ibn Qurra avec ses études sur les paraboles, les ellipses, les paraboloïdes et sur le moment d'inertie d'une barre homogène[18], puis par son petit-fils, Ibrâhîm Ibn Sinân (m. 940), qui a simplifié considérablement les démonstrations par l'introduction de ce qui s'apparente, aujourd'hui, à la transformation affine[19]. Enfin, dans la seconde moitié du X^e^ siècle, ou au début du XI^e^ siècle, Ibn al-Haytham a étudié le paraboloïde sphérique en utilisant des propositions arithmétiques sur les séries de puissances[20].

Sciences, Turnhout, Brepols Publishers, n° 94, p. 66-72. Sur Ibn al-Haytham, cf. Djebbar, A. et Rashed, R. (1981), *op.cit.*, p. 66. Sur Ibn Sayyid, cf. Alaoui, J. (1983), *Rasa'il falsafiyya li Abi Bakr Ibn Bajja jja* [Lettres philosophiques d'Abu Bakr Ibn Bajja], Beyrouth, Dar ath-thaqafa - Casablanca, Dar an-Nashr ; Djebbar, A. (1993), *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e^ siècle: al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, Folkerts, M. et Hogendijk, J.-P. (édit.), *Vestigia Mathematica*, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L., Busard, Amsterdam-Atlanta, GA, p. 79-91.

17 Suter, H. (1902), *Bibliotheca Mathematica*, 3, F.3, p. 259-272.

18 Jaouiche, K. (1976), *Le livre du Qarastun de Thabit Ibn Qurra*, Leyde, Brill, p. 143-169.

19 Rosenfeld, B.-A. (1971), *Geometrical transformations in the medieval East*, XII^e^ Congrès International d'Histoire des Sciences, III, A, p. 123-131.

20 Rashed, R. (1981), « Ibn al-Haytham wa hajm al-mujassam al-mukâfi' [Ibn al-Haytham et le volume du paraboloïde] », *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 5, n° 1-2, p. 3-74.

Les sources pré-islamiques du raisonnement géométrique

Les mathématiques arabes sont les héritières directes de deux grandes traditions scientifiques écrites, celle de l'Inde et celle de la Grèce, et d'une troisième tradition que nous appellerons « locale » et que l'on pourrait qualifier « d'orale » dans le sens où elle ne se réfère à aucun texte écrit ni même à un enseignement. Comme cette tradition s'est perpétuée à travers des pratiques dont le contenu est, en partie, semblable à celui de certaines tablettes cunéiformes, nous l'avons rattachée à la tradition mésopotamienne, même si des recherches futures pourraient révéler certaines de ses spécificités.

La tradition indienne

L'apport connu de la tradition mathématique indienne concerne en premier lieu le calcul avec le système décimal positionnel et le zéro. Mais cet apport est également important en astronomie, en particulier avec la notion de sinus qui a fini par remplacer celle de la corde de l'angle double des astronomes grecs et en particulier de Ptolémée (m. 168). Mais, il ne semble pas que cette tradition ait transmis aux savants des pays d'Islam des notions, des outils et des problèmes géométriques théoriques, même si leurs pratiques en ont fait usage implicitement et parfois même explicitement[21]. Il est encore plus improbable qu'elle leur ait transmis des démarches déductives, même si ces démarches ont pu exister dans la pratique ou dans le corpus scientifique indien préislamique. En effet, un précieux témoignage d'al-Bîrûnî laisse supposer que ces démarches avaient eu leur

[21] Comme c'est le cas pour le théorème de Pythagore ou le procédé par découpage et assemblage. Cf. Bose, D. ; Sen, M.-S.-N. et Subbarayappa, B.-V. (édit.) (1971), *A Concise History of Science in India*, Calcutta, Baptist Mission Press, p. 147-148.

place dans l'activité mathématique de certains savants de l'Inde. C'est ce que l'on peut déduire d'un passage de son important ouvrage sur l'histoire de l'Inde. Après avoir décrit le contenu des vingt-quatre chapitres du *Brahmasphutasiddhanta*, le fameux traité du mathématicien du VIe siècle, Brahmagupta, al-Bîrûnî cite le propos suivant de ce savant : « Quant au vingt-cinquième, le Diha Nakraha Ddaha, dans lequel les problèmes sont résolus par la pensée, sans utilisation du calcul, je ne l'ai pas évoqué ici car les causes ont été établies "ici" par le calcul ». Cette citation suscite la remarque suivante d'al-Biruni : « Je pense que ce à quoi il fait allusion ce sont les démonstrations des problèmes, sinon comment aurait-on pu résoudre quoi que ce soit de cet art sans calcul ? »[22].

La tradition mésopotamienne

La question de l'existence de certains types de raisonnements géométriques dans la tradition mésopotamienne ne se pose plus depuis quelques décennies. En effet, l'analyse des pratiques qui se sont poursuivies dans certains foyers du Croissant fertile jusqu'à l'avènement de l'Islam, nous autorise à dire qu'une géométrie concernant les lignes et les figures et utilisant des méthodes de construction, de résolution ou de justification a bien été transmise aux premiers mathématiciens arabes. Cela dit, on ne connaît toujours pas le contour exact de ce qui a été préservé ou adjoint, à partir du IXe siècle, aux méthodes rencontrées dans les écrits mathématiques grecs. Ces derniers qui, comme on va le voir, constituent l'héritage de loin le plus important, quantitativement et qualitativement, concernant les raisonnements géométriques, ont tellement dominé la

---

[22] Biruni (al-) (1983), *Tahqîq mâ li l-Hind min maqûla maqbûla fî l-caql aw mardhûla* [Description précise des catégories <de pensée> de l'Inde admises ou réprouvées par l'esprit], Beyrouth, cAlam al-kitab, p. 109.

tradition mathématique arabe qu'ils ont fait oublier les pratiques locales préislamiques.

Ce qui nous est parvenu des pratiques géométriques, antérieures à la tradition du corpus grec, peut se subdiviser en trois groupes. D'abord, les problèmes de mesure où il s'agit de déterminer parmi les éléments d'une figure celle qui est inconnue. Ici, la solution n'est pas le résultat d'une construction, à la manière euclidienne. C'est un calcul faisant intervenir des algorithmes de résolution d'une catégorie de problèmes qui vont être exprimés, beaucoup plus tard par al-Khwârizmî (m. 850), sous forme d'une équation du second degré. Ce groupe n'intéresse pas notre propos mais nous avons tenu à le signaler comme témoin indiscutable d'une géométrie issue directement de la tradition mésopotamienne, comme l'atteste le contenu de certains textes cunéiformes[23].

Le second groupe est constitué de procédés géométriques que l'on pourrait appeler des preuves *de visu* ou des *monstrations*, par opposition aux *démonstrations* de type euclidien. On les rencontre en calcul pour « justifier » ou « appuyer » la validité d'un algorithme. C'est ce que fait par exemple al-Baghdâdî (X^e siècle), dans *son Kitâb al-takmila* [Livre de la complétion], à propos de la multiplication et de la division, ainsi qu'al-Hubûbî (X^e siècle), dans son *Kitâb al-istiqsâ'*, pour déterminer la solution d'un problème d'héritage sans faire intervenir l'algorithme algébrique de

[23] En particulier certains problèmes de la tablette n° 13901 du British Museum où il s'agit d'ajouter à un carré ses côtés pour avoir un nombre donné. Le même type de problèmes se retrouve dans l'épître d'Ibn ᶜAbdûn, intitulée *Risâla fî l-taksîr* [Épître sur le mesurage]. Cf. Djebbar, A., Al-Risâla fî l-taksîr li Ibn ᶜAbdûn, shâhid ᶜalâ al-mumârasât al-sâbiqa li l-taqlîd al-jabrî al-ᶜarabî [L'épître sur le mesurage d'Ibn ᶜAbdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe], *Suhayl, Journal for the History of the Exact and Natural Sciences in Islamic Civilisation*, Barcelone, vol. 5, partie arabe, p. 7-68 ; vol. 6, partie arabe, p. 81-86.

résolution d'une équation du premier degré. En algèbre, ce procédé de justification est nettement distingué de la démonstration géométrique de type euclidien, dans la mesure où on parle, à son propos, de justification « *bi l-ᶜiyân* » [par la vue]. C'est ce que fera, par exemple, le grand algébriste du Xe siècle, Abû Kâmil (m. 930) dans son *al-Kitâb al-kâmil fî l-jabr* [Le livre complet en algèbre][24].

Le troisième groupe, a un point commun avec le précédent dans la mesure où il sollicite également la constatation *de visu*, mais il est plus riche par son introduction explicite du mouvement et, surtout, par l'utilisation de la technique du *découpage* et de *l'assemblage*, pour résoudre un problème de construction ou pour établir une propriété. Ce procédé a été suffisamment important dans la pratique géométrique arabe pour que deux grands savants, respectivement du IXe et du Xe siècle, ait éprouvé le besoin de l'évoquer dans leurs écrits.

Le premier de ces deux mathématiciens n'est autre que Thâbit Ibn Qurra, un des meilleurs connaisseurs des *Éléments* d'Euclide, qui reprend, dans une de ses épîtres, l'étude du théorème de Pythagore (Ve s. av. J.C.) et de sa généralisation. Après avoir établi le théorème par rotation de triangles rectangles (découpés dans les deux carrés initiaux) et par reconstitution du carré qui en est la somme, il dit ceci : « Cette construction et les constructions de géométrie qui lui sont analogues correspondent à un procédé qui, si je me le représentais dans son ensemble et que je voulais expliciter son sens par une expression,

[24] Abû Kâmil (1986), *Kitâb l-jabr wa l-muqâbala* [Le livre de l'Algèbre et de la Muqabala], F. Sezgin (édit.), Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Fac simile du Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha, 379), Frankfurt.

mériterait, selon moi, d'être appelé le procédé du découpage et de l'assemblage »[25].

Le témoignage du second mathématicien, qui n'est autre qu'Abû l-Wafâ' (m. 997), complète le premier dans la mesure où il nous révèle qu'au X[e] siècle, ce procédé de découpage et d'assemblage était abondamment utilisé par les artisans. Dans son livre, intitulé *Kitâb fî ma yahtâju ilayhî al-sâni[c] min al-a[c]mâl al-handasiyya* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques], il dit ceci : « Je fus présent à une réunion où se trouvèrent une quantité de praticiens et de géomètres auxquels on demanda de quelle manière ils feraient un seul carré de trois carrés égaux (...). Un géomètre résolut le problème en déterminant le côté du carré cherché par le théorème, chose qui ne satisfait pas les praticiens, parce que, pour eux, il s'agit de diviser les trois carrés donnés d'une certaine manière et puis de recomposer les parties de telle façon que le tout forme un carré (...). Ensuite les praticiens donnèrent des solutions à leur manière, les unes se fondant sur les démonstrations géométriques, les autres non »[26].

La tradition grecque

Quant à la troisième tradition du raisonnement, c'est à dire celle des Grecs, son importance aux yeux des mathématiciens arabes eux-mêmes dépasse, de loin, tout ce qu'ils ont pu hériter des traditions indienne et mésopotamienne. Au hasard des documents exhumés et traduits, cette tradition, à la fois mathématique et philosophique, va fournir aux spécialistes non seulement les outils du raisonnement géométrique, mais également les types de raisonnement, les

[25] Ibn Qurra, *Fî l-hujja al-mansûba ilâ Suqrât fî l-murabba[c]i wa qutrihî* [Sur la preuve attribuée à Socrate au sujet du carré et de sa diagonale], Ms. Le Caire, Dar riyyada, m/40, ff. 162a-162b.
[26] Abû l-Wafâ', *Kitâb fî mâ yahtâju ilayhi al-sâni[c]...*, *op.cit.*, p. 145.

problèmes et les théorèmes auxquels ils ont été appliqués et, enfin, certaines des réflexions qui ont eu pour objet les raisonnements eux-mêmes.

En géométrie, le raisonnement est parvenu aux savants arabes à travers les écrits de quatre grandes traditions. En premier lieu, celle d'Euclide (III^{e} s. av. J.C.), avec les treize livres des *Éléments* et avec les *Données*. Le premier de ces deux ouvrages est en fait à la base de toute la géométrie de la tradition arabe et il a réellement façonné l'esprit de millions d'apprenants à travers les siècles en les familiarisant avec les notions d'axiomes, de postulats, de définitions, d'hypothèses, de démonstration. Euclide n'y évoque pas explicitement les outils du raisonnement et il ne les discute pas, mais il les met en œuvre selon des procédures précises qui permettent de les repérer aisément.

La seconde source grecque est constituée par les écrits d'Archimède (m. 212 av. J.C.) qui sont parvenus aux Arabes. Il s'agit du traité sur *La mesure du cercle*, et de celui sur *La sphère et le cylindre*. Comme dans ses autres ouvrages qui traitent de la mesure d'aire et de volumes pour des figures non rectilignes ou des solides de révolution, mais qui n'ont pas été traduits en arabe, Archimède utilise la méthode d'exhaustion[27] et le raisonnement par l'absurde pour justifier l'exactitude de la mesure de l'aire ou du volume étudié, mesure qu'il a préalablement déterminé par une démarche non démonstrative[28].

La troisième tradition est celle des *Coniques*. Le livre majeur dans ce domaine est celui d'Apollonius. Il a été

---

27 La méthode d'exhaustion correspond au procédé d'encadrement d'une portion de courbe par deux familles de rectangles dont la somme des aires constitue ce qu'on appelle aujourd'hui les « sommes de Darboux inférieures et supérieures » dont les limites respectives correspondent à l'aire cherchée.

28 Comme il l'explique dans l'un de ses ouvrages, cf. Archimède, (1998), *Livre de la méthode*, Paris, Les Belles Lettres, p. 77-126.

traduit en arabe et a l'objet de nombreuses études et applications, tant en géométrie, en algèbre qu'en astronomie, dans la mesure où certaines des propositions qui y sont établies sont devenues, à leur tour, des outils pour établir des résultats ou pour justifier des propriétés.

La dernière tradition géométrique grecque utilisant le raisonnement concerne l'étude des figures tracées sur la sphère. Les astronomes arabes l'ont découverte à travers la traduction les ouvrages d'Autolycos (III^{e} s. av. J.C.), de Théodose (II^{e} s. av. J.C.) et de Ménélaüs (II^{e} s.). Les contenus de ces ouvrages ont fourni des outils précieux à ces astronomes pour établir de nouveaux résultats et pour réaliser les nombreux calculs exigés par leur étude de certains problèmes de l'astronomie classique. Le plus célèbre de ces outils est incontestablement le théorème de Ménélaüs, appelé *al-Shakl al-qattâ^{c}* [la figure sécante] par les mathématiciens arabes. Il servait au calcul de l'élément inconnu d'un triangle sphérique lorsque les autres éléments étaient connus. Jusqu'à la découverte, au XI^{e} siècle, du théorème du sinus, celui de Ménélaüs a été l'outil incontournable dans les calculs des astronomes.

Les différents types de raisonnement de la tradition grecque

Les raisonnements les plus importants de la tradition grecque sont *l'analyse* et la *synthèse*. En fait ils constituent les deux étapes d'une même démonstration. La première étape consiste, étant donné une proposition *P* à établir, à la supposer vraie et d'en déduire une série d'implications qui aboutissent soit à un résultat déjà connu soit à une définition, soit à un postulat. La seconde étape consiste à partir du résultat ou de la prémisse à laquelle a abouti l'analyse et, par une série d'implications, à établir la proposition *P*.

Habituellement, on fait débuter l'histoire de ce raisonnement par l'analyse socratique des concepts, complétée **par la division platonicienne théorisée par Aristote, avec un enrichissement substantiel d'Ibn Sînâ (m. 1037) dans sa théorie de la définition. Les mathématiciens des pays d'Islam** ont dû connaître cet aspect philosophique du procédé, mais cela ne pouvait être déterminant dans la maîtrise de la technique proprement dite de l'analyse à laquelle ils ont dû s'initier très tôt, essentiellement en géométrie, et qu'ils ont eu à pratiquer, seule ou en combinaison avec la synthèse. C'est en effet dans cette discipline, plus précisément dans certains écrits grecs d'abord, puis dans les travaux des géomètres arabes que cette méthode a été la plus féconde. Elle a d'ailleurs eu un statut privilégié car elle a été longtemps associée aux preuves géométriques que les mathématiciens arabes, suivant en cela les Grecs, considèrent comme les plus rigoureuses.

Le plus ancien texte connu qui parle de l'analyse et de la synthèse, en les définissant, se trouve dans l'introduction au Livre VII de la *Collection mathématique* de Pappus (IV^{e} siècle). Ce texte est suffisamment important pour qu'il mérite d'être cité intégralement : « L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose, et ce, dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse »[29].

Il faut préciser que les mathématiciens arabes ne vont pas découvrir l'analyse et la synthèse à travers cette citation de Pappus, surtout que le livre de ce dernier ne semble pas avoir été traduit en arabe. C'est plutôt leur étude des propositions utilisant ce raisonnement qui leur a permis de se familiariser avec lui et d'en entrevoir les différentes formes d'intervention, en fonction des problèmes posés. On constate ainsi que chacune des deux parties de ce raisonnement se présente parfois seule, soit parce que l'autre partie est jugée évidente, soit parce qu'elle n'intervient qu'au premier stade de l'investigation, jouant ainsi un rôle dans la découverte et non dans la justification. C'est, par exemple, ce qui arrive au raisonnement par analyse dans toutes les démonstrations de la tradition arabe qui visent à justifier l'existence des solutions (positives) des équations cubiques.

Le troisième type de raisonnement utilisé abondamment par les mathématiciens arabes est le raisonnement par l'absurde. Bien qu'il porte un nom distinct, il ne diffère pas, par sa structure interne, du raisonnement par analyse puisque pour établir qu'une proposition *P* est vraie, on suppose que *non P* est vraie et on procède à une analyse qui aboutit à quelque chose qui est contraire à un principe premier ou à un résultat réputé vrai.

[29] Pappus (1982), *La Collection mathématique*, Ver Eecke, P. (trad.), Paris, Blanchard, vol. II, p. 477.

Le statut des différents types de justification géométriques

Les justifications hypothético-déductives

Il semble que, dès le IXᵉ siècle, certains mathématiciens ont commencé à discuter du rôle et du statut de certains raisonnements géométriques qui étaient alors en usage et plus particulièrement ceux qui intervenaient dans le corpus euclidien et ceux qui avaient servi à justifier la validité des algorithmes de l'algèbre. Mais nous ne savons pas si la lecture critique de ce corpus les a amenés à débattre du rôle et du statut de l'analyse et de la synthèse et s'ils l'ont fait, aucun de leurs écrits sur le sujet ne nous est parvenu. Mais leur pratique quotidienne, en tant que chercheurs, surtout aux Xᵉ-XIᵉ siècles, montre clairement que ce sont ces deux outils pris ensemble ou séparément (en fonction des sujets étudiés) qui sont intervenus, le plus souvent, dans l'établissement des résultats nouveaux. C'est peut-être pour cela d'ailleurs que, dès le Xᵉ siècle, l'analyse et la synthèse ont inspiré des écrits dont le contenu, que nous évoquerons plus loin, visait à en expliquer la signification et l'utilisation aux apprenants. Mieux que cela, la diffusion de l'un de ces écrits, le *Traité sur l'analyse et la synthèse* d'Ibn al-Haytham, a influencé profondément deux mathématiciens de l'Occident musulman qui se sont efforcé de privilégier ces raisonnements dans l'élaboration de leurs ouvrages. Le premier est al-Mu'taman Ibn Hûd (m. 1085), roi de Saragosse et auteur de l'important ouvrage de géométrie et de théorie des nombres, intitulé Kitâb al-istikmâl [Livre du perfectionnement]. Le second, Ibn Munᶜim, a enseigné à Marrakech où il a rédigé son traité intitulé *Fiqh al-hisâb* [La science du calcul]. Dans ce livre, il s'est fixé comme objectif, qu'il ne pouvait pas atteindre, de démontrer toutes les propositions à l'aide de l'analyse et de la synthèse. Cette démarche, est d'ailleurs appliquée rigoureusement dans certains chapitres de théorie des nombres, dans le but d'éviter l'utilisation du raisonnement par induction. Mais cela alourdit considérablement l'exposé mathématique.

Le troisième procédé déductif utilisé dans la tradition mathématique arabe est le raisonnement par l'absurde. Certains indices montrent que son statut dans cette tradition arabe a fait l'objet de débats, et a été à l'origine de certaines initiatives. On peut ainsi supposer que c'est parce qu'il n'était pas satisfait de ce type de raisonnement et de son utilisation, par Euclide, dans certaines propositions des *Éléments* qu'al-Mâhânî (m. 888) qu’il s’est efforcé de le remplacer par un raisonnement direct. Il en est résulté un livre, intitulé *Kitâb fî sitta wa* ^{c}*ishrîna shaklan min al-maqâla al-ûlâ min Uqlîdis allatî la yuhtâju fî shay'in minhâ ilâ l-khulf* [Livre sur les vingt-six propositions du premier Livre des *Éléments* d'Euclide pour lesquelles <le raisonnement par> l'absurde n'est pas nécessaire]. Malheureusement, cet ouvrage ne nous est pas parvenu. Deux siècles plus tard, ^{c}Umar al-Khayyâm évoque à nouveau cette question en la jugeant secondaire, l'important à ses yeux n'étant pas le fait d'utiliser tel ou tel raisonnement mais de s'assurer que les prémisses, à la base de la démonstration sont acceptables. Voici d'ailleurs ce qu'il dit, en évoquant les *Éléments* d'Euclide et l'absence de démonstration du postulat des parallèles par les commentateurs arabes de cet ouvrage : « A ceux qui (...) voulaient expliquer son ouvrage et dissiper les doutes, il incombait de démontrer de semblables propositions et de les étudier attentivement, et non pas de transformer la preuve directe en une preuve par l'absurde et la preuve par l'absurde en une preuve directe. Celui qui connaît véritablement la preuve d'une chose s'en contente, qu'elle soit directe ou par l'absurde, car, que signifie la transformation d'une preuve directe en une preuve par l'absurde alors qu'on laisse de semblables propositions sans démonstration ? »[30].

De son côté le mathématicien Thâbit Ibn Qurra qui répondait, semble-t-il, aux critiques formulées contre les démarches adoptées par Euclide dans l'agencement des propositions des *Éléments* et dans leur justification, tente d'expliquer ces démarches par des arguments pédagogiques, tout en conseillant de ne pas les suivre lorsqu'il s'agit de démontrer une propriété ou de justifier une construction[31].

C'est également ce mathématicien qui, sans critiquer les démonstrations géométriques d'al-Khwârizmî, dans son livre d'algèbre, en propose d'autres qui utilisent des propositions déjà établies par Euclide dans le Livre II des *Éléments*[32]. Cette initiative peut exprimer soit un souci de rigueur de la part d'Ibn Qurra soit une volonté de se conformer au canon de la démonstration géométrique tel qu'il apparaît précisément dans les propositions du Livre II. Mais, il faut préciser que ce critère de rigueur, associé aux démarches euclidiennes, n'était pas toujours appliqué. C'est ainsi qu'au X^e^ siècle déjà, al-Nayrîzî insérait, dans son commentaire aux Éléments, des démonstrations attribuées à Héron d'Alexandrie (II^e^ siècle.), qui font intervenir des lignes au lieu des surfaces. C'est aussi cette voie, jugée non rigoureuse au IX^e^ siècle, qui a été empruntée, d'abord prudemment par Abû Kâmil (m. 930) puis franchement par Ibn al-Bannâ au XIII^e^ siècle. Le premier a raisonné sur les lignes sans tenir compte

---

30 Djebbar, A. (1997), *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al-Khayyam..., op.cit.,* p. 29.

31 Ibn Qurra, *Risâla fî kayfa yanbaghî an yuslaka ilâ nayli al-matlûb min al-maᶜâni al-handasiyya* [Épître sur la manière de procéder pour obtenir ce qui est demandé au sujet des notions géométriques], Ms. Istanbul, Aya Sofya 4832, ff. 1b-4a.

32 Ibn Qurra, *Qawl fî tashîh masâ'il al-jabr bi l-barâhîn al-handasiyya* [Propos sur la vérification des problèmes d'algèbre par les démonstrations géométriques], Ms. Oxford Bodl., Thurston 3970/3, f. 140b.

de l'homogénéité chère aux géomètres[33]. Quant au second, il a abandonné, dans son livre d'algèbre, toute référence aux objets et aux outils de la géométrie pour n'utiliser dans ses implications que des opérations arithmétiques appliquées à des monômes[34].

Le procédé de découpage et d'assemblage, source d'erreurs

C'est à la fois au nom de cette conception de la démonstration qui est à l'œuvre dans les exemples précédents et au nom de la précision, primordiale dans les problèmes de construction, que le géomètre du X^e^ siècle, Abû l-Wafâ', critique les procédés utilisant le découpage et l'assemblage.

Dans le chapitre de son livre qui traite de « la composition et de la division de carrés lorsque leur nombre n'est pas composé de deux carrés », il fait les remarques suivantes qui n'ont besoin d'aucun commentaire : « Les géomètres et les artisans se sont trompés au sujet de ces carrés et de leur composition : les géomètres à cause de leur peu de pratique dans les constructions, et les praticiens parce qu'ils ne possèdent pas la science de la démonstration. En effet, lorsque le géomètre n'a pas de pratique de la construction, il lui est difficile de réaliser, selon ce que voudrait l'artisan, ce qui s'est avéré juste par les démonstrations géométriques. Quant à l'artisan, son but est ce que la construction réalise et dont la justesse est ce que lui fait voir le sens et l'observation. Et il ne se préoccupe pas de la démonstration

[33] Djebbar, A. (1980), *op.cit.,* p. 13-17.

[34] Aballagh, M. (1988), *Raf^c^ al-hijâb d'Ibn al-Bannâ* (1256-1321), thèse de Doctorat, Paris, Université Paris I-Panthéon-Sorbonne. Cf. également Ibn al-Bannâ : *Kitâb al-usûl wa l-muqaddimât* [Le livre des fondements et des préliminaires], Djebbar (édit. & trad.). Djebbar, A. (1990), *Mathématiques et Mathématiciens du Maghreb médiéval (IX^e^-XVI^e^ siècles) : Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*, thèse de Doctorat, Université de Nantes-Université de Paris-Sud, vol. II.

de ce qui concerne la chose imaginée et les lignes. Si la démonstration d'une chose apparaît au géomètre dans l'esprit, il ne se préoccupe pas de la justesse de cette chose par l'observation, si elle ne l'est pas par la démonstration (...). Quant au géomètre, il connaît, par la démonstration, la justesse de ce qu'il cherche lorsque c'est lui qui extrait les notions sur lesquelles travaillent l'artisan et l'arpenteur. Mais, il lui est difficile de réaliser par la construction ce qu'a établi la démonstration lorsqu'il n'a pas de pratique dans ce que fait l'artisan et l'arpenteur (...) »[35].

Et pour illustrer son propos Abû l-Wafâ' expose des exemples de découpage de petits carrés en triangles ou en quadrilatères dont l'assemblage fournit une figure qui est, *de visu*, un carré mais qui ne l'est pas en fait lorsqu'on se donne la peine de faire un raisonnement géométrique.

Le raisonnement géométrique comme objet d'étude

Partant essentiellement de la lecture des *Éléments* d'Euclide, les mathématiciens arabes ont réfléchi sur le raisonnement géométrique, à travers ses différentes formes et, surtout, à travers ses prémisses (axiomes, postulats, définitions) à la fois pour en analyser les différents aspects et leurs caractéristiques, mais aussi pour s'assurer de la validité de ses fondements. Il y aura ainsi deux orientations essentielles dans ce domaine : la première purement mathématique, a débouché sur la publication d'un certain nombre d'épîtres ou d'ouvrages qui traitent du raisonnement géométrique en tant qu'outil pour établir des propositions ou pour valider des constructions. La seconde orientation, de nature philosophique, a concerné l'analyse critique de certaines prémisses, utilisées dans les *Éléments* sous forme de postulats ou de définitions, et sur lesquelles ont été

[35] Abû l-Wafâ', *Kitâb fî mâ yahtâju ilayhi al-sâni*[c]*...*, *op.cit.*, p. 144-145.

échafaudées, à la fois, la géométrie euclidienne des figures et la théorie des grandeurs.

Le pionnier de l'étude du raisonnement géométrique, dans la tradition arabe, semble avoir été Thâbit Ibn Qurra. Dans son « Épître sur la manière de procéder pour obtenir ce qui est demandé au sujet des notions géométriques », il commence par donner une classification des problèmes de géométrie en trois catégories : en premier lieu, la description d'une construction à l'aide d'instruments qui font connaître soit la réalisation d'un objet géométrique, soit son existence. En second lieu, la détermination de la grandeur ou de l'état d'un objet géométrique inconnu de grandeur ou d'état. En troisième lieu, la détermination de ce qui concerne les propriétés générales ou particulières d'un objet géométrique, les caractéristiques qui le rendent nécessaire, qui l'accompagnent ou qui le distinguent d'autres objets, ainsi que les propositions et les résultats qui en découlent.

Puis, il indique la démarche à suivre pour aboutir à la solution du problème posé : d'abord déterminer à quelle catégorie appartient le problème, puis prendre connaissance des fondements et des préliminaires propres à cette catégorie, puis déterminer le genre du problème posé, puis recenser ou avoir à l'esprit les propositions et les résultats connus liés au genre en question et, enfin, déterminer les implications nécessaires aux conditions accompagnant ce problème[36].

Quelques décennies plus tard, son petit-fils, Ibrahim Ibn Sinan, a publié son « Traité sur la méthode de l'analyse et de la synthèse dans les problèmes de géométrie » qui contient, dit-il, « la description des méthodes "nécessaires" aux apprenants pour résoudre les questions de géométrie ».

[36] Ibn Qurra, *Risâla fî kayfa yanbaghî an yuslaka…*, *op.cit*.

Après avoir critiqué ses prédécesseurs qui ont écrit sur ce thème mais qui, selon lui, ne se sont adressés qu'aux spécialistes, il subdivise, à son tour, les questions de géométrie en trois catégories : les constructions d'objets géométriques, les déterminations de grandeurs et les démonstrations de propriétés. Puis il donne une classification détaillée des deux premières catégories regroupées sous le terme de « problèmes », par opposition à la troisième qui est celle des « théorèmes ». C'est ainsi qu'il distingue les problèmes exacts, impossibles, délimités et indéterminés, en subdivisant les derniers en problèmes avec ou sans conditions. Puis il consacre tout son traité à l'étude, à travers des exemples, de ces différents types de problèmes[37].

Le troisième écrit, dont il ne nous est parvenu qu'une seule copie, est également consacré aux seuls problèmes géométriques, par opposition aux théorèmes, et il s'adresse aussi aux apprenants. Son auteur, al-Sijzî, commence par des remarques pertinentes sur l'inné et l'acquis en mathématique puis il aborde le traitement proprement dit des questions géométriques en faisant les recommandations suivantes en vue de la résolution d'un problème : assimiler les principes premiers et les prémisses liées aux problèmes, avoir à l'esprit les relations internes entre les différentes règles et prémisses qui sont susceptibles d'être utilisées, se servir de l'intelligence, de l'intuition et des procédés ingénieux pour la découverte des méthodes de résolution. Pour ce qui est des types de raisonnement, il suggère d'utiliser *l'analyse* et la *synthèse*, avec le procédé du *transfert* qui consiste à

[37] Saïdan, A.-S. (1983), *Rasâ'il Ibn Sinân* [Les épîtres d'Ibn Sinan], Kuwait, p. 67-143 ; Bellosta, H. (1994), *L'analyse et la synthèse selon Ibrahim Ibn Sinan*, thèse de doctorat, Paris, Université de Paris VII.

transformer un problème donné en un autre dont la résolution entraîne celle du premier[38].

Le dernier livre connu qui s'inscrit dans cette tradition, et de loin le plus important, est celui d'Ibn al-Haytham qui est intitulé « Traité sur l'analyse et la synthèse ». Son propos est à la fois particulier et général. Il est particulier dans la mesure où il ne traite que d'un seul type de raisonnement, l'analyse et la synthèse, mais il est général dans le sens où il ne limite pas son utilisation à la géométrie. En effet, il considère que c'est un outil universel pour l'établissement des propriétés et pour la résolution des problèmes spécifiques à chacune des disciplines qui constituaient l'essentiel des mathématiques « savantes » de son époque, c'est à dire la théorie des nombres, l'astronomie et la musique, en plus des différentes branches de la géométrie. D'une manière plus précise, Ibn al-Haytham commence par décrire, selon la double démarche d'un philosophe et d'un mathématicien, la nature du raisonnement mathématique en montrant qu'il est réductible à des syllogismes mais qu'il n'est pas que cela dans la mesure où il utilise des moyens ingénieux et l'intuition dans le choix des données supplémentaires ou dans la réalisation de constructions auxiliaires. Puis, comme ses prédécesseurs, mais sans se cantonner à la géométrie, il subdivise l'analyse en deux types, celle qui permet de démontrer des propriétés et celle qui fournit la solution d'un problème. A la suite des trois mathématiciens que nous avons déjà évoqués, Ibn al-Haytham, insiste sur le rôle des prémisses, des résultats déjà établis et des données supplémentaires suggérées par l'intuition et qui permettent de poursuivre l'analyse d’une

[38] Al-Sijzî, *Kitâb fî tashîl as-subul li istikhrâj al-alshkal al-handasiyya* [Traité visant à faciliter les méthodes de résolution des problèmes géométriques], Saïdan, A.-S., *Rasâ'il Ibn Sinân*, *op.cit.*, Appendice 3, p. 339-372 ; Hogendijk, J.-P. (1996), *Al-Sijzî's Treatise on Geometrical Problem Solving*, Téhéran, Fatemi Publishing Co..

proposition. Pour la classification des problèmes de géométrie, il reprend partiellement la démarche d'Ibn Sinan, mais en distinguant les propositions délimitées, c'est à dire soumises à des conditions de possibilités, et les propositions non délimitées qui sont de deux types: celles qui sont déterminées et celles qui ne le sont pas. L'originalité d'Ibn al-Haytham se situe aussi au niveau de sa description des instruments de l'analyse, qui sont les différentes espèces de grandeurs connues, et qui permettent de déterminer et d'exprimer ce qui est recherché et qui est donc inconnu. Il s'agit, en particulier, des connues de rapport, des connues de forme et des connues de position. Si les définitions des deux premiers types sont classiques, celle de la dernière permet à Ibn al-Haytham d'innover en introduisant la notion de mouvement, théorisant ainsi une pratique que l'on avait déjà observée au IX^e^ siècle, en particulier dans les procédés par découpage et assemblage. La dernière partie du traité comprend une série d'exemples, empruntés aux disciplines mathématiques qu'il a considérées, et à l'aide desquels il illustre son exposé théorique ainsi que les différentes manières de faire intervenir l'analyse et la synthèse.

Le rôle de l’imagination dans l’établissement de résultats mathématiques

Imagination et géométrie euclidienne

Les mathématiciens de la tradition arabe ont tous utilisé les objets géométriques définis par Euclide dans les *Éléments*. Mais, ils n’ont pas tous accepté le contenu de ces définitions, C’est ainsi que, très tôt, certains d’entre eux, ont émis des « doutes » sur la clarté, la précision ou même la validité de telle ou telle formulation. Sans nous donner d’informations sur leurs auteurs, le grand mathématicien Ibn al-Haytham s’est attaché à rassembler toutes ces critiques et à tenter d’y répondre, soit en justifiant les formulations d’Euclide, soit en proposant d’autres, jugées par lui plus satisfaisantes. Parmi les nombreuses réponses que renferme l’important traité qu’il a consacré à ces « doutes », certaines font intervenir l’imagination aux côtés d’autres facultés, telles que la sensation et la spécification. Comme il n’est pas possible de reproduire ici tous les extraits où l’imagination est sollicitée d’une manière décisive, nous nous contenterons de résumer l’argumentation d’Ibn al-Haytham en l’illustrant par quelques citations.

La première de ces réponses concerne la définition du point[39]. Après avoir longuement expliqué que le géomètre n’est pas tenu de donner des définitions qui répondent au canon des philosophes (c’est à dire en termes de genre et de différence), il adopte une voie médiane en proposant l’explication suivante qui, selon lui, répond à la fois aux exigences du philosophe et aux préoccupations du mathématicien : « Quant à l’existence de la quiddité (…), il a été montré dans ‘le Livre des explications des prémisses’, que les grandeurs mathématiques, qui sont le solide, le plan et la ligne, existent dans l’imagination et leur existence a lieu par leur extraction des corps sensibles. Et si les grandeurs mathématiques existent dans l’imagination, les lignes existent donc dans l’imagination ; et les lignes existent dans l’imagination selon toutes les positions qu’il est possible d’imaginer. Il est donc possible, sans ambiguïté, que les lignes puissent être imaginées se coupant. Et il est clair que, pour deux lignes qui se coupent, l’endroit de l’intersection est concevable et imaginable, sans obstacle à son imagination.

[39] Selon Euclide, « Le point est ce dont il n’y a aucune partie », cf. Vitrac, B. (1990), *Euclide, Les Eléments*, vol. 1, Livres I-IV, Paris, Presses Universitaires de France, p. 151.

Et l'image de l'intersection est concevable sans ambiguïté et c'est l'endroit commun aux deux lignes qui se coupent »[40].

La seconde réponse concerne la critique de la définition des extrémités d'une ligne[41]. A ceux qui disent qu'Euclide a donné une définition générale qui ne s'applique ni aux lignes infinies (droites ou courbes) ni aux cercles, Ibn al-Haytham répond en réaffirmant le rôle essentiel de l'imagination dans l'existence des objets géométriques et, après un long développement, il en déduit la finitude des lignes évoquées dans la définition d'Euclide et donc la validité et le caractère général de cette définition[42].

C'est le même type d'argumentation qu'il fournit pour justifier La division euclidienne de l'angle plan et celle du cercle[43] sauf qu'à cette occasion il précise un peu plus sa

[40] Ibn al-Haytham, *Kitâb hall shukûk Uqlîdis fî l-usûl wa sharh ma'ânîh* [Livre sur la résolution des doutes des Éléments d'Euclide et l'explication de ses notions], Ms. Istanbul, Bibliothèque de l'Université, n° 800, in Fac Simile, Sezgin F. (édit.), Frankfurt, 1985, p. 6-8.

[41] Selon Euclide : « Les limites d'une ligne sont des points », cf. Vitrac, B. (1990), *Euclide, Les Eléments*, vol. 1, *op.cit.*, p. 153.

[42] Ibn al-Haytham, *Kitâb hall shukûk Uqlîdis...*, *op.cit.*, p. 9-10. Voici le passage en question : « Nous disons, en réponse à ce doute, qu'Euclide a, en fait, parlé des lignes qui existent dans l'imagination. Et toute ligne parmi les lignes droites et courbes qui existent dans l'imagination est finie parce que, ce qui, parmi les droites, est infini ne se figure pas dans l'imagination. Et si elle est figurée dans l'imagination et que l'imagination s'en empare, ce qui est imaginé d'elle est une partie parce que l'imagination n'appréhende pas sa totalité parce qu'elle n'a pas de totalité. Car la totalité existe pour ce qui est limité par des fins. Et ce qui n'a pas de fin n'a pas de totalité ; et ce qui n'a pas de totalité ne peut être imaginé. Et si celui qui imagine n'appréhende pas la totalité de la chose qu'il imagine, ce qui est imaginé est sa partie (...). Et tout ce qui est imaginé est fini. Donc toute ligne imaginée est finie. Et comme Euclide parlait en fait des lignes imaginées et que les lignes imaginées sont finies, le propos d'Euclide concerne donc les lignes finies. C'est pourquoi son propos est général, je veux dire, lorsqu'il dit 'et les deux extrémités de la ligne sont deux points', il veut <dire> que <pour> toute ligne imaginée finie, ses deux extrémités sont deux points ».

[43] *Selon Euclide* « Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite » et « Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique par rapport à

pensée en affirmant d'abord que « l'existence de l'ensemble des notions mathématiques a lieu dans la faculté imaginative seulement » puis en introduisant une classification des choses existantes selon que cette existence est assurée par la sensation ou par l'imagination[44].

Imagination, mouvement et infini géométrique

La Géométrie arabe repose d'abord sur les *Éléments* d'Euclide. Or, le mouvement est présent à plusieurs endroits de cet ouvrage et sa présence a posé des problèmes à certains mathématiciens et a donné des idées à d'autres. Comme on va le voir, les premiers vont rejeter le mouvement, au nom de principes philosophiques et les seconds vont, au contraire renforcer son rôle en l'intégrant en quelque sorte à l'activité imaginative du mathématicien. Quant à l'infini, il se manifeste d'abord au tout début du Livre I, plus précisément dans la définition 23, c'est-à-dire celle qui concerne les droites parallèles[45]. Il réapparaît un

laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles », cf. Vitrac, B., *Euclide, Les Eléments,* vol. 1, *op.cit.*, p. 162.

[44] *Ibn al-Haytham, Kitâb hall shukûk Uqlîdis..., op.cit..* p. 18-21. Sur la notion d'angle, il dit ceci : « La chose qui advient de l'inclinaison des deux lignes est une image conçue et imaginée qui advient dans le plan qui contient les deux lignes (...). L'angle est donc conçu et imaginé ; et si l'angle est conçu et imaginé, il existe ». A propos de la définition du cercle, il fait le commentaire suivant : « Les choses existantes se divisent en deux parties : l'existant par le sens et l'existant par l'imagination et la spécification, Et l'existant véritable est l'existant par l'imagination et la spécification. Et l'existant par l'imagination existe d'une manière véritable parce que l'image qui advient dans l'imagination d'une manière véritable et elle ne devient impossible et ne change que par le changement de celui qui l'imagine. Et le cercle qu'évoque Euclide est une image imaginée et non sentie. Et si c'est ainsi, le cercle existe ».

[45] La définition 23 dit ceci : « Des droites parallèles sont celles qui, étant dans le même plan et indéfiniment prolongés de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre », cf. Vitrac, B. (1990), *Euclide, les Éléments*, traduction française, vol. 1, Livre I à 1V, Pans, Presses Universitaire de France, p. 166.

peu plus loin dans le fameux cinquième postulat[46]. C'est la présence de l'infini, explicitement dans la définition, et implicitement dans le postulat qui va soulever des problèmes et permettre l'intervention de l'imagination à la fois pour justifier l'utilisation du mouvement et pour assurer la réalisation de certaines opérations géométriques.

Contrairement au contenu de la définition 23, celui du postulat est facile à concevoir, à visualiser et à imaginer. C'est pourtant lui qui va faire couler le plus d'encre et qui va même provoquer des polémiques entre certains mathématiciens de la tradition arabe[47]. Un des aspects de cette polémique, qui est le moins intéressant pour nous ici, concerne la nécessité ou non de démontrer rigoureusement le postulat ou de lui substituer un postulat plus acceptable. Le second aspect de la polémique porte sur les outils utilisés dans certaines tentatives arabes de démonstration de ce postulat et, surtout, sur les présupposés philosophico-mathématiques qui les sous-tendent.

L'élément principal de la controverse concerne en fait la manière de réaliser effectivement les droites qui interviennent dans la définition 23 du Livre I des Éléments. Dans cette définition, il s'agit de concevoir d'abord le prolongement illimité d'une droite puis celui de deux droites devant rester parallèles. C'est la difficulté de se représenter le prolongement et le parallélisme à l'infini qui va favoriser l'élaboration de réflexions originales sur le rôle de l'imagination. Sur cette question, nous disposons de deux

[46] Selon ce postulat « Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs, et du même côté, plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits », cf. Vitrac, B., *Euclide, les Eléments*, *op.cit.*, p. 175.

[47] Jaouiche, K. (1986), *op.cit.* ; Rosenfeld, B.-A. et Youschkevitch, A.-P. (1989), *The Theory of Parallels in the Arabic Literature of the 9-14 th Centuries*, Chalhoub, S. et 'Abdul-Rahmân, K.-N. (édit. & trad.), Alep, Matba'at Jâmi't Halab.

textes dont l'importance ne tient pas seulement à l'intervention de l'imagination dans la réalisation de ce qui est défini mais aussi et surtout dans la remise en cause implicite de certaines conceptions philosophiques grecques à propos des objets géométriques.

Le premier texte est celui de Thâbit Ibn Qurra. Il est intitulé *Opuscule sur le* «"fait" que si les deux lignes "droites" sont menées suivant deux "angles" inférieurs à deux droits elles se rencontrent »[48]. L'auteur y explique la nécessité d'introduire en Géométrie, par l'imagination, le mouvement d'un objet donné soit pour définir de nouveaux objets, comme c'est le cas pour le cercle qui est engendré par la rotation d'un segment fixe à une de ses extrémités, soit pour appliquer un objet sur un autre, comme pour les figures qui doivent être comparées[49].

Mais Ibn Qurra laisse entendre que même si le mouvement se fait par l'imagination, il peut s'avérer nécessaire d'introduire des éléments supplémentaires qui assurent la non-déformation des objets lorsqu'ils auront été soumis à un mouvement par l'imagination. C'est précisément le cas à propos du tracé d'une droite infinie pour laquelle il

---

[48] Jaouiche, K. (1986), *ibid.*, p. 151-160. Dans son deuxième opuscule sur le postulat des parallèles, Ibn Qurra dit : « Plusieurs principes de démonstration des propositions et théorèmes de la géométrie qui ont besoin d'être démontrés se ramènent à l'utilisation de l'opération que nous avons mentionnée : je veux dire le déplacement de l'un des deux objets dont l'un est mesuré par l'autre, son élévation de l'endroit où il se trouve et son déplacement dans notre imagination sans que le mouvement lui fasse changer de forme » , cf. Jaouiche, K. (1986), *ibid.,* p. 151.

[49] Dans son deuxième opuscule sur le postulat des parallèles, Ibn Qurra dit : « Plusieurs principes de démonstration des propositions et théorèmes de la géométrie qui ont besoin d'être démontrés se ramènent à l'utilisation de l'opération que nous avons mentionnée : je veux dire le déplacement de l'un des deux objets dont l'un est mesuré par l'autre, son élévation de l'endroit où il se trouve et son déplacement dans notre imagination sans que le mouvement lui fasse changer de forme », cf. Jaouiche, K. (1986), *ibidem.,* p. 151.

est nécessaire, selon Thabit, d'imaginer un corps solide en mouvement, qui conserve sa forme en se mouvant. Dans ce cas, dit-il « Chaque point d'un corps solide que nous imaginons mû en totalité dans une seule direction d'un mouvement un, simple et rectiligne, se meut en ligne droite et trace, en se déplaçant, une ligne droite sur laquelle il passe »[50].

Dans son livre, intitulé *Sharh musâdarât Uqlîdis* [Explication des prémisses <du livre> d'Euclide], Ibn al-Haytham poursuit la démarche d'Ibn Qurra en justifiant sa validité et en la simplifiant. Comme, pour lui, la possibilité de représenter ou d'imaginer un objet mathématique semble être la condition de l'existence de cet objet[51], toute son argumentation, pour justifier la définition euclidienne des droites parallèles, va consister à élaborer « le moyen par lequel il peut exister des lignes droites qui aient cette propriété et par lequel celui qui imagine peut juger que si elles sont prolongées indéfiniment elles conservent cette position »[52].

Il commence d'abord par faire remarquer que la propriété pour deux droites infinies de ne pas se rencontrer « n'est pas représentable puisqu'un accroissement constant appartient à l'espèce de ce qui est fini et qu'il n'existe aucun moyen de se représenter ce qui n'est pas fini car tout ce qu'on peut représenter est fini ». Or, ajoute-t-il, « on ne peut affirmer qu'il existe deux droites qui, prolongées à l'infini des deux côtés, ne se rencontrent qu'après avoir indiqué le moyen par lequel il peut exister des lignes droites qui aient cette

[50] *Ibidem*, p. 153.
[51] Il dit en effet, à propos de la définition de deux segments parallèles « Pour ce qui est de se représenter deux droites situées dans une seule étendue plane et qui, si elles sont prolongées jusqu'à une certaine limite, de chacun des deux côtés, ne se rencontrent pas, cela est possible », *op.cit.*, p. 161.
[52] *Ibid.*, p. 161-162.

propriété et après que celui qui imagine ait pu juger que si elles sont prolongées indéfiniment elles conservent cette position ». Puis il décrit le procédé par lequel il fait exister deux droites parallèles : il s'agit à chaque étape d'imaginer des segments de droites mis bout à bout puis une perpendiculaire à ces segments soumise à un mouvement « non composé de mouvement et non composé de mouvement et de repos, mais un mouvement unique, non combiné à un autre et continu ». L'extrémité de la perpendiculaire engendrera alors une ligne droite qui sera la parallèle à la première droite.

Cette combinaison étroite de l'imagination (qui permet la représentation des objets finis) avec le mouvement (qui permet d'étendre cette représentation à des objets infinis), transparaît d'abord au niveau de la terminologie utilisée par Ibn al-Haytham dans les textes qu'il a consacrés à ce sujet. Il est ainsi très révélateur de constater que, dans son *Kitâb fî hall shukûk Kitâb* Uqlîdis les cinq pages manuscrites qui traitent de la définition 23 du Livre I des *Éléments*, contiennent 28 fois l'une ou l'autre forme liée au mot *takhayyul* [imagination] et pas moins de 104 fois l'une ou l'autre forme liée au mot *haraka* [mouvement][53]. Mais tout aussi révélatrice est son utilisation du vocabulaire de la Physique dans ses définitions mathématiques. On y trouve en effet les termes de mobile, de temps, de distance parcourue, de mouvements semblables[54].

---

[53] *Ibidem*, p. 87-91.

[54] Le passage suivant illustre bien la démarche de notre mathématicien : « Si donc deux points se meuvent de deux mouvements semblables, alors ils engendrent deux lignes semblables. Et si le temps des deux mouvements est le même ou ce sont deux temps égaux, alors les deux droites engendrées sont non seulement semblables mais égales car deux mobiles qui se meuvent de deux mouvements égaux sont des mobiles qui parcourent deux distances égales en un même temps ou en deux temps égaux », cf. Jaouiche, K. (1986), *op.cit*, p. 151.

L'imbrication étroite de l'imagination et du mouvement se révèle aussi et surtout, chez Ibn al-Haytham, dans sa conclusion à la construction d'une droite illimitée où il lie étroitement l'existence d'une droite infinie avec la possibilité, pour l'imagination, de se la représenter comme résultat du mouvement rectiligne uniforme. Il dit en effet ceci : « Et si cette ligne n'est pas manifeste pour l'imagination avant le mouvement du point, elle le devient après le mouvement du point. Et si elle devient manifeste pour l'imagination après avoir été inimaginable, c'est qu'elle s'est produite dans l'imagination »[55].

Il faut préciser que la démarche d'Ibn al-Haytham, consistant à solliciter l'imagination pour justifier et expliciter une définition euclidienne, s'inscrit en fait dans une conception plus large du rôle qu'il assigne à l'imagination dans l'existence d'objets géométriques. Il s'en explique d'ailleurs longuement dans *Kitâb fî hall shukûk kitâb Uqlîdis*[56] en développant, avec précision, ses idées sur la sensation et l'imagination et sur leurs rôles respectifs en Géométrie. On peut même conjecturer que cette démarche originale en mathématique n'est que la conséquence logique d'une longue pratique en Physique puisque Ibn al-Haytham a été un spécialiste de l'Optique géométrique à laquelle il a consacré une œuvre majeure[57]. C'est probablement cette double spécialisation (sans parler de celle qu'on lui reconnaît également en Astronomie) qui l'a amené, non seulement à dépasser le cloisonnement, parfois étanche, entre les disciplines dites théoriques et celles qui traitent des objets du monde sensible mais, surtout, à combiner les

[55] *Ibid.*, p. 88.
[56] Ibn al-Haytham, *Kitâb hall shukûk Uqlîdis …*, *op.cit.*, p. 2-37.
[57] Il faut d'ailleurs signaler qu'à différents endroits de son *Traité d'Optique*, Ibn al Haytham traite de l'imagination et de ses liens avec la vue, cf. Ibn al-Haytham, *Kitâb al manâzir*, Sabra, A. (édit.), Koweit, 1983. II, 4, ff. l36a-144a.

instruments et les notions des deux domaines en les rendant complémentaires.

Nous ne savons pas si ces initiatives, peu orthodoxes au regard des conceptions de la philosophie grecque des mathématiques (dominantes à l'époque), ont provoqué, en leur temps, des commentaires ou des polémiques. Tout ce que nous pouvons affirmer, à l'heure actuelle, c'est que la première réaction hostile connue est de la fin du XIe siècle ou du début du XIIe. II n'est d'ailleurs pas étonnant qu'elle soit le fait d'un mathématicien aux convictions aristotéliciennes très affirmées, qui n'est autre que ʻUmar al-Khayyâm. Dans son *Epître sur l'explication des prémisses problématiques d'Euclide*, il s'insurge contre les initiatives d'Ibn al-Haytham à propos du mouvement et les qualifie de procédés « sans absolument aucun lien avec la géométrie »[58]. Il est suivi dans ces critiques par Nasîr al-Dîn al-Tûsî (m. 1274) pour qui les audaces d'Ibn al-Haytham « font apparaître l'incohérence de son discours, la confusion qu'il fait entre deux arts différents, son manque de compétence dans la science dans laquelle on corrige les principes de la Géométrie, ainsi que son manque d'expérience dans la manière de corriger les fondements d'une science »[59].

Malheureusement, aucun de ces auteurs n'a eu accès au *Musâdarât* et ils n'en ont connu que le résumé inséré par Ibn al-Haytham dans son *Livre sur la résolution des doutes des Éléments d'Euclide*. Ce résumé reprend bien l'essentiel de ce qu'il avait exposé dans les *Musâdarât* sur le mouvement, mais il n'évoque pas le rôle de l'imagination. La critique des

[58] Al-Khayyâm, *Risâla fî sharh mâ ashkala min musâdarât Kitâb Uqlîdis* [Epître sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide], Sabra, A. (édit). Alexandrie, 1961, p. 6-7.

[59] Al-Tûsî, *ar-Risâla al-shâfiya ʻan al-shakk fî l-khutût al-mutawâziya* [Epître qui délivre du doute relatif aux lignes parallèles], Jaouiche, K. *La théorie des parallèles en pays d'islam*, *op.cit.,* p. 204.

deux mathématiciens porte donc essentiellement sur l'initiative d'Ibn al-Haytham d'avoir osé définir des objets géométriques à l'aide du mouvement, ce qui allait à l'encontre de l'enseignement d'Aristote qui disait, explicitement, à un endroit de la métaphysique que « les choses mathématiques rentrent dans la classe des êtres sans mouvement » et, à un autre endroit, que « la mathématique est une science théorétique et qui traite d'êtres immuables »[60].

Cela dit, et sans connaître le rôle qu'a fait jouer Ibn al-Haytham à l'imagination dans son commentaire des *Musâdarât*, Nasîr al-Dîn al-Tûsî met en garde le lecteur, à propos des deux droites du cinquième postulat, contre le recours à l'imagination seule pour acquérir une « conviction » mathématique. Il dit en effet ceci : « Si quelqu'un s'imaginant que ces deux droites, par suite de l'inclinaison de l'une vers l'autre, se rapprochent l'une de l'autre quand elles s'éloignent considérablement de leur base et tendent à se rencontrer juge qu'elles se rencontrent effectivement en négligeant de donner la raison d'un tel jugement, comptant sur l'intuition de l'apprenant, il commettrait une erreur contre ce qui a été prouvé par les règles philosophiques et attesté par les lois mathématiques ». Et, pour illustrer son propos, il évoque une situation géométrique semblable, celle de la droite asymptote à une courbe conique qui, en se rapprochant indéfiniment de sa courbe, donne l'impression qu'elle finira par la rencontrer, ce qui est contredit par la démonstration[61].

[60] Aristote, *Métaphysique*, Tricot, J. (trad.), Paris, Vrin, 1940, 989b 32 ; 1064a 31-32.
[61] Jaouiche, K. (1986), *op.cit.*, p. 202-203.

L'imagination dans la géométrie des coniques

Nasîr al-Dîn al-Tûsî n'est pas le premier savant à avoir évoqué les asymptotes à une courbe en relation avec le rôle de l'imagination. Comme on va le voir, ce problème a intéressé un certain nombre de mathématiciens et de philosophes de la tradition arabe médiévale. Il intéresse également notre propos car l'imagination a été un élément essentiel dans certains commentaires inspirés par l'étude de ces lignes particulières. Au vu des textes qui nous sont parvenus et qu'il nous a été possible de consulter, on peut dire qu'il y a eu deux manières de traiter cette question des asymptotes ou tout au moins deux aspects dans son traitement. Un premier aspect, strictement technique, a concerné les propriétés mathématiques de ces lignes. Parmi les études connues qui se sont limitées à ce seul aspect de la question, on peut citer celles de Sharaf ad-Dîn al-Tûsî (m. 1213), celle d'Ibn al-Haytham et celle d'un anonyme dont l'épître a été traduite en latin au XIIIe siècle[62]. Ces travaux ne s'écartent pas de la problématique posée par la proposition 4 du Livre II des *Coniques* d'Apollonius (IIIe av. J.C.) concernant la démonstration géométrique de la nécessité pour l'asymptote à une branche de l'hyperbole de se rapprocher indéfiniment de la courbe sans jamais la rencontrer[63].

Le second aspect, que l'on trouve à la fois chez des mathématiciens et chez des philosophes, concerne la notion

[62] Clagett, M. (1954), A Medieval Latin Translation of a short Arabic Text on the Hyperbola, *Osiris*, 11 (1954), p. 359-385 ; Al-Tûsî : *Oeuvre*, Rashed, R. (édit.), Paris, 1986, vol. 1, p. 5-15 ; vol. 2, p. 129-139. Pour Ibn al-Haytham, cf. Sezgin, F., G.A.S., *op.cit*, p. 373.

[63] Apollonius de, P. (1959), *Les Coniques*, P. Ver Eecke (trad.), Paris, Blanchard, p. 130-131. La proposition s'énonce ainsi : « Les asymptotes et la section, prolongées à l'infini, se rapprochent toujours davantage les unes de l'autre, et elles en arrivent à un intervalle moindre que tout intervalle donné ».

de l'infini qui est induite par la possibilité de ces lignes de se rapprocher l'une de l'autre sans jamais se rencontrer. C'est là où l'imagination et évoquée ou sollicitée, selon trois démarches bien distinctes. La première consiste à situer la place de l'imagination par rapport à la démonstration rigoureuse. C'est ce que fait al-Sijzî à propos du comportement de l'asymptote à une hyperbole. C'est pour lui un très bon exemple de « chose difficile à imaginer et à concevoir ; alors que la justesse de la preuve empêche l'erreur et le trouble de l'âme dans la connaissance de cela »[64]. Mais, il va plus loin en proposant l'on peut avoir de les imaginer. Il distingue ainsi cinq catégories de propositions : celles dont la perception et l'imagination « ont lieu par la voie des principes philosophiques », celles qui « sont faciles à imaginer sans l'établissement de leurs preuves », celles qui « ne peuvent être imaginées avant l'établissement de leurs preuves », celles qui sont « difficiles à imaginer même si leur preuve a été établie » et, enfin, celles qui « ne peuvent pas être imaginées même si la preuve les a établies »[65].

La seconde démarche tente, au contraire, d'utiliser l'imagination pour justifier des opérations mathématiques concernant les asymptotes ; C'est ce que fait al-Qummî (XIe s.), dans son épître sur les courbes asymptotes, pour

[64] Al-Sijzî : *Risala fî amr al-khattayn...*, Ms. Leiden, Or. 14, ff. 226a-b.

[65] Pour expliciter sa pensée, al-Sijzî donne les exemples suivants qui illustrent chacune de ces catégories de propositions : « Quant à la chose qu'il est possible d'imaginer sans preuve, c'est comme le cercle qui coupe le cercle en deux endroits (...). Quant aux choses que l'on peut imaginer avec l'établissement de leurs preuves, c'est comme la surface égale à la surface <qui>, lorsque la longueur de l'une des deux augmente par rapport à celle de l'autre, la largeur de l'une des deux diminue par rapport à celle de l'autre. Quant à la chose que l'on peut imaginer après l'avoir démontrée, c'est comme l'égalité des angles du triangle. Quant aux choses qu'il est difficile d'imaginer après l'établissement de la justesse de leur preuve, c'est comme les propriétés des figures difficiles (...) comme c'est le cas pour cette propriété évoquée <de l'asymptote> ». Cf. as-Sijzî : *Risâla fî amr al-khattayn ..., op.cit.*, ff. 226 b.

expliciter ce qu'il entend par « prolongement infini d'une ligne ». II dit à ce propos : « Puis nous la prolongeons jusqu'à l'infini, c'est-à-dire que nous imaginons qu'elle n'aboutit pas à une limite qui empêche son prolongement continuel, selon ce qu'utilisent les gens de cet art »[66].

La troisième et dernière démarche, que l'on trouve chez les philosophes de la tradition arabe, consiste à illustrer, par exemple des asymptotes, un discours sur l'imagination. C'est le cas, en particulier, de Maïmonide (m. 1204) qui commence par affirmer que « l'action de l'imagination n'est pas la même que celle de l'intelligence, mais lui est opposée ». Puis, il montre comment l'imagination ne peut accomplir aucune des actions de l'intelligence et il conclut en prenant l'exemple des mathématiques où, dit-il, « il y a certaines choses que l'homme, lorsqu'il les considère par son imagination, ne peut nullement se figurer, et qu'au contraire il trouve aussi impossibles pour l'imagination que le serait la réunion des contraires; et cependant, telle chose qu'il est impossible de s'imaginer, on peut établir par la démonstration qu'elle existe et en faire ressortir la réalité ». Puis, il illustre ce propos par l'exemple de l'asymptote et il conclut en ces termes : « Il est donc démontré qu'il existe des choses qu'on ne peut s'imaginer et qui non seulement ne sauraient être comprises par l'imagination, mais lui paraissent même impossibles »[67].

L'imagination dans les problèmes de construction

Comme nous l'avons laissé entendre dans l'introduction à cette étude, les activités géométriques arabes n'ont pas toutes pour origine le corpus grec. Certaines d'entre elles ont

66 Al-Qummî, *Risâla fî imkân wujûd al-khattayn al-ladhayn yaqtaribân abadan wa lâ yaltaqiyân*, Ms. Leiden, Or. 14, f. 229 a.

67 Maïmonide (1979), *Le guide des égarés*, Munk, S. (trad.), Paris, Verdier, p. 208-209.

puisé, du moins à leur début, dans un fond local constitué d'un ensemble de pratiques qui étaient probablement enseignées dans des milieux spécialisés, comme celui des artisans et celui des arpenteurs. C'est à cette tradition que l'on pourrait rattacher les problèmes de construction que l'on ne trouve pas dans les *Éléments* d'Euclide (la source géométrique grecque la plus importante qui soit parvenue aux scientifiques des pays d'Islam). Or, une des particularités de cet ensemble de pratiques géométriques est le rôle que l'on fait jouer à la forme visible des objets géométriques et à la possibilité de les imaginer au repos ou en mouvement dans le but de les comparer (par superposition) ou de les dissocier et de les associer pour constituer de nouveaux objets.

Un des premiers mathématiciens qui a évoqué ce type de pratique où se mêlent visualisation des formes et mouvement (et qui nécessite donc l'intervention de l'imagination), est Thâbit Ibn Qurra. Dans une de ses épîtres, consacrée à la généralisation du théorème de Pythagore (m. vers 495 av. J.C.). Il expose une justification « mécanique » du cas classique de ce théorème, en utilisant un procédé basé sur le découpage des figures, leur déplacement et leur collage[68]. Comme Ibn Qurra donne une justification géométrique rigoureuse de ce procédé qu'il s'attribue d'ailleurs explicitement, on peut penser que la technique du découpage et du collage est bien antérieure au IXe siècle et qu'elle faisait partie d'un ensemble de pratiques mathématiques dont le but n'était pas d'élaborer des preuves rigoureuses pour certaines propriétés mais de résoudre des problèmes de construction, en s'aidant de l'observation et de l'imagination.

[68] Ibn Qurra, *Risâla fi l-hujja al-mansûba ilâ Suqrât fi l-murabba' wa qutrihî* [Sur la preuve attribuée à Socrate à propos du carré et de sa diagonale]. Ms. istanbul. Aya Sofya 4832, ff. 40a-42a, cf. également Sayili, A. (1960), Thâbit Ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem, *Isis*, p. 35-37.

Cette hypothèse est d'ailleurs confortée par le témoignage d'un autre mathématicien qui a observé la vitalité de ces pratiques géométriques à son époque, c'est-à-dire au X[e] siècle, et qui a mis en garde contre les erreurs qu'elles peuvent induire, à cause du rôle qu'y jouent l'imagination et la vision, au détriment de la démonstration. Il s'agit d'Abû l-Wafâ' al-Buzjânî qui nous livre la réflexion suivante qui lui a été inspirée par les pratiques, totalement opposées selon lui, des géomètres et des artisans, à propos de la composition de figures géométriques à partir d'autres figures : « Quant à l'artisan, son but est de te trouver ce qui permet la réalisation de la construction. La justesse de ce qu'il voit lui apparaît par les sens et l'observation et il ne se soucie pas de la démonstration de ce qui est imaginé (…). Le géomètre, s'il a la démonstration de la chose imaginée ne se soucie pas de la justesse de la chose par l'observation lorsqu'elle n'est pas totalement juste ».

Mais, Abû l-Wafâ' va plus loin en montrant, sur des exemples précis, que la démarche des artisans peut aboutir à des erreurs dans la mesure où les constructions qu'ils ont imaginées ne sont pas des solutions géométriquement justes. Un de ces exemples concerne la composition d'un carré à l'aide de trois carrés égaux. Après avoir exposé une des méthodes utilisées par les artisans pour réaliser cette construction, il se propose d'en montrer la fausseté. Mais, avant cela, il fait le commentaire suivant où l'imagination apparaît clairement comme une source d'erreur : « Quant à la figure de ce qu'il a construit, elle est dans l'imagination. Et celui qui n'a pas d'expérience dans l'art de la Géométrie, voit qu'elle est juste et si on en dévoilait la vérité, il saurait qu'elle est fausse. Quant au fait qu'il s'imagine qu'elle est juste, c'est à cause de l'exactitude des angles et de la coïncidence des côtés. Les angles du carré sont en effet justes et chacun d'eux est droit. Et à cause de cela, on s'imagine qu'elle est juste (...). Et si les angles sont droits et les côtés rectilignes, chacun s'imagine qu'un carré a été construit à partir de trois carrés »[69]. Puis il conclut en montrant rigoureusement qu'il est impossible, avec le découpage en question, de constituer un seul carré. Cela dit, Abû l-Wafâ', en mathématicien averti, ne prononce pas de condamnation à l'encontre de l'intervention de l'imagination parce qu'il est bien placé, en tant qu'éminent géomètre, pour savoir que cette intervention est courante et parfois décisive.

L'imagination en astronomie

Il y a, au moins, un domaine de l'astronomie où, de l'avis même des spécialistes de cette discipline, on ne peut pas se passer de l'imagination. C'est celui des théories planétaires. Déjà, au II^e siècle, Ptolémée avait imaginé des modèles permettant de décrire le mouvement de chaque planète. Mais, ces modèles vont être contestés par les astronomes de la tradition arabe qui vont tenter de leur en substituer d'autres. D'ailleurs, ces efforts visaient plus à satisfaire des exigences philosophiques qu'à se conformer à d'éventuels progrès théoriques ou à de nouveaux résultats de l'observation.

Un des premiers savants arabes à avoir remis en cause les anciens modèles grecs a été le mathématicien Ibn al-Haytham dont les critiques sont exposées dans son traité intitulé *Maqâla fî l-shukûk ᶜalâ Batlamyûs* [Epître sur les doutes au sujet de Ptolémée]. Dans cet ouvrage, il montre l'incompatibilité des modèles ptoléméens avec certains fondements philosophiques grecs sans proposer de modèles de substitution[70]. Mais, si l'on en croit l'historien al-Bayhaqi

69 Abû l-Wafâ', *Kitâb fî ma yahtâju ilayhi as-sâni' min 'ilm al-handasa* [Livre sur ce dont a besoin l'artisan en science de la géométrie], al-Alî, S.-A. (édit.), Bagdad, Imprimerie de l'Université de Bagdad, 1979, p. 145-147.

70 Pines, S. (1964), *Ibn al-Haitham's Critique of Ptolemy*, Actes du X^e Congrès International d'Histoire des Sciences, Paris, vol. 1, p. 547-557.

(m. 1077), notre savant aurait, dans un ouvrage qui ne nous est pas parvenu, complété sa réflexion en imaginant de nouveaux modèles permettant de mieux représenter les mouvements des différentes planètes visibles à son époque. Voici d'ailleurs un extrait de cet ouvrage tel que nous l'a rapporté al-Bayhaqî : « Nous avons imaginé des configurations compatibles avec les mouvements célestes. Mais, si nous avions imaginé d'autres configurations, différentes d'elles, également compatibles avec ces mouvements, il n'y aurait eu aucun empêchement à cette imagination, parce qu'il n'a pas été établi de démonstration du fait qu'il est impossible qu'il n'y ait pas, en dehors de ces configurations, d'autres configurations compatibles avec ces mouvements et qui leur correspondent »[71].

Quelques siècles plus tard, l'astronome Ibn al-Shâtir (m. 1375) proposera, à son tour, d'autres modèles qu'il dit avoir imaginés et dont il justifie la nécessité et l'utilité de la manière suivante : « J'ai constaté que les plus éminents des astronomes récents ont émis des doutes indiscutables sur le modèle d'astronomie, bien connu, de Ptolémée. J'ai donc demandé à Dieu, le Tout Puissant, de m'apporter l'inspiration et de m'aider à inventer des modèles qui permettent d'atteindre le but que l'on désire. Et Dieu, qu'il en soit béni et glorifié, me permit d'imaginer des modèles universels de mouvement des planètes »[72].

Les éléments que nous avons rassemblés dans cette étude ne sont qu'une première illustration de l'intervention de l'imagination dans différents domaines de la tradition

[71] Al-Bayhaqî : *Târîkh 'ulamâ' al-Islâm*, Muhammad M.-H. (édit.). Le Caire, Maktabat ath thaqâfa addîniya, 1996, p. 99-100.

[72] Gingerich, O. (1986), *L'astronomie en Islam*, *pour la science*, Paris, Avril, p. 69. Sur la contribution d'Ibn ash-Shâtir en Atronomie théorique, cf. Kennedy, E.-S. et Ghanem, I. (1976), *The life and Work of Ibn al-Shâtir, an Arab Astronomer of thefourteenth Century*, Alep, University of Aleppo, p. 44-48, 60-68, 93-106.

mathématique arabe et à différents niveaux. Cela dit, et comme on le constate aisément à la lecture de ces témoignages, certains domaines n'ont pas été évoqués. Une des raisons de ce fait est bien sûr l'absence de témoignages dans les sources accessibles. Mais, une raison plus essentielle pourrait être liée au contenu des disciplines concernées (en tant qu'ensembles d'objets, d'outils, de démarches et de types de problèmes), contenu qui ne favorise pas l'intervention de l'imagination comme représentation de formes et de « situations » mathématiques. Cela semble avoir été le cas pour la Science du calcul, pour la Théorie des nombres et pour certains chapitres de l'algèbre.

En science du calcul, on trouve bien, ici ou là, quelques traces préislamiques d'une représentation géométrique d'opérations arithmétiques, comme on peut le voir dans l'ouvrage d'Ibn Tâhir al-Baghdâdî (m. 1037) où ont été reproduits des figures géométriques imaginées par les premiers praticiens pour visualiser les opérations de multiplication et de division[73].

En théorie des nombres, on retrouve la même démarche qui consiste à tenter de substituer, à des objets abstraits, des figures qui se fixent mieux dans l'imagination. Deux exemples illustrent cette démarche : celui des nombres figurés que nous avons déjà évoqués et celui de la tentative de démonstration géométrique, dans le cas n = 3, de la conjecture dite de Fermat (m. l665)[74].

---

[73] Ibn Tâhir : *at-Takmila fi l-hisâb* [La complétion en calcul], A. S. Saidan (édit.), Koweit, Manshûrât ma'had al-makhtûtât, 1985, pp. 190-191. Pour une traduction française de ces textes, cf. A. Djebbar : *Le raisonnement géométrique dans la tradition mathématique arabe*, Actes du Colloque International sur "*Le raisonnement géométrique, enseignement et apprentissage*" (E.N.S. de Marrakech, 28-30 mai 1997), Marrakech, Imprimerie Walili, 1998, p. 115-118.

[74] Cette conjecture, avancée par des mathématiciens des pays d'Islam dès le Xe siècle, affirme qu'il n'existe pas trois nombres entiers vérifiant : $x^n + y^n = z^n$. Cf. Abû Ja'far : *al-Burhan al-khututi <^{c}ala annahu> la yumkinu an yujtama^{c}a min*

Quant aux chapitres de l'algèbre qui se sont progressivement éloignés de la géométrie, ils ont conservé aussi quelques traces de leurs liens originels avec cette discipline, comme on peut le constater avec la présence, dans certains ouvrages maghrébins du XIV[e] siècle, de représentations géométriques pour les équations du second degré et pour la méthode de double fausse position (utilisée pour la résolution des problèmes aboutissant à des équations du premier degré)[75]. Mais, il est important de préciser deux choses à propos de cette présence de la géométrie dans les trois disciplines évoquées. En premier lieu, on constate que les thèmes qui ont continué à solliciter l'imagination à travers des représentations géométriques sont relativement peu nombreux, comparés à l'ensemble des sujets traités dans le cadre de ces trois disciplines. En second lieu, une lecture, même rapide, des thèmes en question montre que les représentations géométriques y apparaissent plus comme des survivances fossilisées que comme des outils pour stimuler une imagination féconde.

Il nous reste à dire quelques mots à propos des différents niveaux d'intervention de l'imagination dans la tradition mathématique arabe. Le premier est celui de la définition des objets géométriques. Nous avons tenté de montrer comment l'imagination y intervient pour assurer, chez certains auteurs, l'existence des objets à définir. Le second niveau est celui de la justification. Les éléments que nous avons présentés ne concernent qu'un aspect de l'intervention de l'imagination, celui où le mouvement joue un rôle

---

ᶜadadayn mukaᶜᶜabayn ᶜadad mukaᶜᶜab [Preuve par les lignes qu'il n'est pas possible que la somme deux nombres cube soit un nombre cube], Ms. Oxford, Thurston n° 3, f. 140a.

75 Souissi, M. (1969), *Ibn al-Bannâ, Talkhîs aᶜmâl al-hisâb* [Abrégé des opérations du calcul], Tunis, Publications de l'Université de Tunis, p. 88-89.

essentiel, et nous ne savons pas encore si cette démarche s'est perpétuée après le XIe siècle.

Il y a un troisième niveau que nous avons évoqué au tout début de cette étude, sans l'avoir réellement traité. C'est celui du rôle de l'imagination dans le processus de découverte. Aucun des mathématiciens actuels que nous avons interrogés ne nie ce rôle dans ses propres activités de recherche, en particulier dans la phase d'investigation où les idées émergent et connaissent un début d'articulation, et aucun d'entre eux ne pense qu'il a pu en être autrement chez ses prédécesseurs et en particulier chez les scientifiques de la tradition arabe médiévale.

Pourtant, lorsqu'on interroge, sur ce point précis, le corpus mathématique arabe qui nous est parvenu, on ne récolte que quelques allusions de peu d'intérêt scientifique, comme celle de l'astronome Ibn ash-Shâtir qui remercie Dieu de lui avoir « *permis d'imaginer des modèles universels de mouvement des planètes* » ou celle du mathématicien Ibn al-Hâ'im (m. 1412) qui explique, en ces termes, comment Dieu l'a aidé à imaginer une méthode de résolution d'une équation du troisième degré : « J'ai veillé des nuits à son sujet au point où j'ai désespéré d'aboutir à sa résolution (...) et que je l'ai prise comme exemple (...) de ce qu'il n'est pas possible de résoudre par les méthodes algébriques. Et lorsque j'en fus à ce stade, j'ai "de nouveau" concentré ma réflexion sur elle en sollicitant l'aide de Celui qui donne l'intelligence. Et Dieu me facilita "la tâche" en m'inspirant une méthode merveilleuse »[76].

Il est peu probable, à notre avis, d'exhumer un jour une réflexion de chercheur sur la manière dont l'imagination est intervenue pour élaborer une méthode de résolution, un

[76] Ibn al-Majdî, *Hâwî l-lubâb* [Le recueil de la moelle], Ms. Londres, British Museum, Add. 7469, f. 199 a.

procédé de construction ou une démonstration. Cela n'est pas étonnant lorsqu'on sait qu'il est même arrivé aux mathématiciens de la tradition arabe d'occulter, délibérément, toute une partie d'une démonstration. C'est particulièrement vrai pour les propositions qui ont été établies par le procédé d'analyse et de synthèse, Un des exemples les plus significatifs et celui du livre de ᶜUmar al-Khayyâm sur la résolution géométrique des équations cubiques. Pour chacune des équations non réductibles au second degré, al-Khayyam exhibe deux courbes coniques, différentes à chaque fois, et il montre, par synthèse, que leur intersection fournit bien la solution de l'équation en question. Mais, à aucun moment, il n'évoque l'analyse du problème, c'est-à-dire la procédure qui lui a permis, en s'aidant de ses acquis mathématiques, de son intuition et de sa faculté imaginative, de trouver les « bonnes » courbes, celles qui répondent exactement au problème étudié[77].

Une autre forme d'occultation qui concerne le rôle de l'imagination dans la phase d'investigation peut se deviner à la lecture d'une catégorie d'écrits mathématiques que nous n'avons pas encore évoqués ici. Il s'agit des ouvrages de Thâbit Ibn Qurra[78], d'Ibrahim Ibn Sinan[79] d'al-Sijzi[80] et d'Ibn al-Haytham[81], dont des copies nous sont parvenues, et peut-être ceux d'autres auteurs que les recherches futures

---

[77] Djebbar, A. et Rashed, R. (1981), *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*, Alep, éd. de l'Institut d'Histoire des Sciences Arabes, p. 37-72.

[78] Ibn Qurra, *Risâla fi kayfa yanbaghî an yuslaka ilâ nayli 1-matlûb min al-ma'âni al-handasiya* [Epître sur la manière de procéder pour obtenir ce qui est demandé au sujet des notions géométriques], Ms. Aya Sofya 4832, f. 1b-4a.

[79] Saïdan, A.-S. (1983), *Rasâ'il Ibn Sinân* [Les épîtres d'Ibn Sinân], Koweit, p. 67-143.

[80] Hogendijk, J. P. (edit. & trad.) (1996), A1-Sijzi's Treatise on Geometrical Problem Solving. Téhéran, Fatemi Publishing Co.

[81] Rashed, R. (1991), « L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham », Rashed, R. (dir.) : *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique : hommage à Jules Vuillemin*, Paris, éd. du C.N.R.S., p. 131-162.

dévoileront. Ces ouvrages traitent des procédés de construction et des outils de démonstration en enseignant, à l'apprenant ou à l'étudiant qui s'initie à la recherche, les meilleurs moyens d'appréhender une question mathématique puis de la résoudre.

Dans leurs exposés, les quatre auteurs que nous venons de citer n'évoquent pas explicitement l'imagination mais, ils parlent de certaines opérations intellectuelles ou simplement de certaines techniques qui ne se conçoivent pas sans l'intervention, à un moment ou à un autre, de la faculté imaginative. Il y a d'abord l'intuition qui permet d'imaginer de nouvelles figures ou de rapprocher des idées éloignées. Ibn al-Haytham la considère comme indispensable, en particulier lorsqu'il n'est plus possible de progresser dans une démonstration par simples implications logiques. Il y a ensuite le procédé de transfert qui consiste à imaginer un nouveau problème ou une nouvelle situation permettant de trouver, plus facilement, une solution au problème initial. Il y a enfin la visualisation du problème posé en imaginant et en réalisant un modèle sensé matérialiser ce problème et permettant de le résoudre d'abord par les procédés de la physique puis, connaissant le résultat, de le déduire par les démonstrations classiques.

Le mathématicien al-Sijzi est le seul à évoquer cette démarche et même à la conseiller. Mais, le silence de ses collègues ne signifie pas du tout qu'elle était absente de leurs méthodes d'investigation. On peut expliquer ce silence par le caractère non orthodoxe de la démarche, aux yeux des puristes médiévaux, ou tout simplement par le fait qu'elle n'intervient pas dans la rédaction finale de la démonstration d'une proposition ou de la construction d'un problème, même si elle est essentielle parfois dans la phase d'élaboration des idées.

Comme on le voit, les réflexions des mathématiciens arabes sur les mécanismes sous-jacents à leurs propres pratiques paraissent bien modestes et sont souvent noyées dans des considérations techniques. Mais, après tout, nous pourrions dire, en reprenant à notre compte une remarque d'al-Khayyâm, que certains aspects de leur activité ne sont pas de leur ressort mais plutôt de celui des philosophes. On constate que c'est bien le cas lorsqu'il s'agit des fondements des mathématiques sur lesquels, effectivement, des philosophes arabes se sont penchés et ont élaboré des réflexions d'un grand intérêt dont un certain nombre nous est parvenu. Mais, ce n'est malheureusement pas le cas du sujet qui nous intéresse ici, comme on peut le voir en parcourant les traités ou les chapitres qu'ont consacré à l'imagination ceux parmi les philosophes des pays d'Islam qui sont connus pour avoir eu une pratique mathématique de haut niveau. En disant cela, nous pensons bien sûr à Ibn Sînâ (m. 1037), qui a inséré des résumés d'ouvrages entiers dans son corpus philosophique *Kitâb al-Shifâ*[82], à Ibn Bâjja, qui a été un brillant élève du grand géomètre du XIe siècle Ibn Sayyid[83] et à Nasîr al-Dîn al-Tûsî, qui est également connu pour avoir imaginé de nouveaux modèles planétaires[84].

Devant ce silence partagé par les mathématiciens et par les philosophes, il nous reste à espérer que les réponses à

[82] Djebbar, A., « Les mathématiques dans l'œuvre d'Ibn Sînâ (370/980-428/1037) », Actes des Journées Avicenne (Marrakech, 25-26 septembre 1998), Marrakech, G. I. E. S., p. 51-70.
[83] Djebbar, A. (1993), « Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du Xe siècle : al-Mu'taman et ibn Sayyid », Colloque International sur *Les mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVIe siècle*, Marseille Luminy, 16-21 avril 1984, Folkerts, M. et Hogendijk, J.-P. (édit.), Vestigia Mathematica, Studies in medieval and earlv modem mathematics in honour of H.L.L Busard, Amsterdam-Atlanta, GA, p. 79-91.
[84] Kennedy, E.-S. (1966), « Late Medieval Planetary Theory », *Isis*, vol. 57, n° 189, p. 365-371.

certaines de nos interrogations sur l'imagination, dans les sciences et plus particulièrement en mathématique, se trouvent dans les écrits des spécialistes du *Kalâm* qui n'ont pas encore bénéficié d'une étude suffisante.

Les procédés de résolution dans les mathématiques arabes

On trouve ces procédés essentiellement dans le *ᶜilm al-hisâb* [science du calcul] qui connaîtra un prolongement nouveau à partir du IXe siècle, avec la naissance de l'algèbre des équations (par opposition à l'algèbre des polynômes). Ce chapitre va s'autonomiser dès sa naissance avant de se transformer en une véritable discipline, avec ses objets, ses outils et ses domaines d'application. Pour cette raison, nous ne traiterons pas ici son contenu et les procédures qui le caractérisent.

A ses débuts, la science du calcul comprenait les objets et les algorithmes du calcul ainsi qu'un grand nombre de procédures de résolution de problèmes. Ses sources sont essentiellement locales mais enrichies par deux apports importants, celui du système décimal positionnel indien, avec le zéro, et celui de la numération alphabétique des astronomes grecs. Quant aux origines des différents méthodes de calcul utilisées, l'état de nos connaissances actuelles ne nous permet pas de les préciser, même si des études comparatives ont aidé à déceler, ici ou là, des similitudes avec des pratiques chinoises, indienne et parfois même égyptiennes.

Les nombreux manuels de calcul produits dans les différentes régions de l'empire musulman et dont certains nous sont parvenus, nous permettent d'affirmer que la cohabitation des traditions antérieures a été la règle pendant des siècles. La terminologie des auteurs confirme d'ailleurs ce phénomène puisqu'ils traitent, parfois dans un même ouvrage, du « calcul des astronomes », du « calcul indien » et du « calcul arabe » (sous-entendu « digital et mental »). Mais lorsqu'ils exposent des procédures complexes, ils se réfèrent rarement à des traditions antérieures. Cette démarche est commune aux auteurs des trois grandes régions de l'empire : le centre, l'Occident et l'Asie Centrale. Mais une comparaison détaillée révèle certaines spécificités. Pour l'Occident musulman (Andalus et Maghreb), on constate une modification profonde de la graphie des chiffres indiens, l'introduction d'un symbolisme précis permettant d'exprimer les différents types de fractions intervenant dans le calcul des parts des ayant droits dans la répartition d'un héritage et, enfin, la modification de la valeur de certaines lettres dans la numération alphabétique des astronomes.

Les procédés de résolution de la science du calcul

Le corpus de la science du calcul qui nous est parvenu dans les manuscrits aujourd'hui accessibles reflète les différentes pratiques observées, dans l'enseignement, dans le cadre des activités astronomiques et dans des corporations de métiers. On y trouve des systèmes de numération adaptés au calcul écrit, mental ou instrumental. Celui des Indiens était positionnel mais celui des astronomes ne l'était pas. Ces différents systèmes accompagnaient des algorithmes de calcul plus ou moins sophistiqués : addition, multiplication, division, soustraction, détermination des racines carrées et cubiques, etc.). Ces outils se retrouvent dans les procédés de résolution de différents types de problèmes, certains directement liés aux activités économiques, juridiques ou sociales au sens large, et d'autres que l'on pourrait qualifier de faussement concrets parce que, au-delà de leur habillage qui renvoyait à des pratiques quotidiennes, ils servaient essentiellement à exercer l'apprenant en vue d'une bonne maîtrise des techniques de calcul.

Une partie des pratiques calculatoires qui viennent d'être évoquées n'est pas le produit de la nouvelle civilisation qui va se développer après la phase des conquêtes réalisées au nom de l'Islam, entre 632 et 751. Elles existaient depuis des siècles et étaient maîtrisées par les utilisateurs des différents groupes humains qui composeront la société de l'empire musulman. Nous n'avons pas toujours d'informations précises sur l'origine de ces pratiques et sur le contexte dans lequel elles se sont épanouies mais nous pouvons les décrire à partir de documents écrits postérieurs au VIIIe siècle. Une première catégorie regroupe des procédés locaux assez semblables mais portant des noms différents renvoyant aux différentes traditions du calcul de la région du Croissant Fertile. On les trouve dans les textes arabes avec les appellations suivantes : *al-Hisâb al-arabî* [calcul arabe], al-Hisâb al-rûmî [calcul byzantin] et al-Hisâb al-hawâ'î [calcul mental][85]. A partir du X^{e} siècle, ces différents aspects d'une même pratique auront une appellation commune : *al-Hisâb al-maftûh* [calcul ouvert][86].

La seconde source de ce savoir-faire aurait un lien direct ou indirect avec les traditions scientifiques de l'antiquité qui se sont épanouies en Méditerranée orientale. Il s'agit d'un ensemble de procédures et de problèmes qui se seraient détachés des corpus écrits de l'Egypte, de la Mésopotamie et de la Grèce et qui auraient continué à circuler après le déclin

[85] Le plus ancien mathématicien connu qui a évoqué ces qualificatifs est al-Uqlîdisî (X^{e} s.). Voir Saïdan, A.-S. (1985), *Al-Fusûl fî l-hisâb al-hindî,* p. 47, 95, 118, 135, 246.

[86] Djebbar, A., « Pratiques savantes et savoirs traditionnels en pays d'Islam : l'exemple des sciences exactes », Actes du Colloque International sur *Science and Tradition : Roots and wings for Development*, (Académie Royale des Sciences d'Outre-Mer & UNESCO, Bruxelles, 5-6 avril 2001), Bruxelles, p. 62-86.

des traditions savantes qui les avaient produits. Malgré le silence des auteurs qui ont continué à les utiliser, il a été possible de repérer leur origine grâce à la comparaison de leur structure et de leur terminologie avec celles des procédures appliquées dans des traditions antérieures comme celles de Mésopotamie, de l'Inde ou même de la Chine[87].

Il faut attendre le IXe siècle, avec l'apparition (avec les traductions) et le développement de ce que l'on appelle les mathématiques savantes pour que se diffusent de nouveaux outils et de nouvelles techniques. Ce fut le cas pour le système décimal positionnel indien et la numération alphabétique pratiquée auparavant par les astronomes grecs. Les outils et les procédés savants qui ont accompagné ces numérations prendront de plus en plus d'importance, mais ils ne réussiront pas à marginaliser les anciennes techniques qui continueront à se diffuser en dehors des institutions d'enseignement. A une certaine époque, qu'il n'est pas possible de déterminer avec exactitude, les anciens procédés et les problèmes ou les exercices qui les accompagnaient ont été intégrés dans les manuels d'enseignement aux côtés des outils et des procédés « savants ».

Avec la publication du *Livre sur le calcul indien* d'al-Khwârizmî, une opportunité nouvelle s'est créée avec la popularisation du système décimal positionnel. Dans un contexte de bouillonnement scientifique et d'initiatives tous azimuts, cet outil va être à l'origine d'une nouvelle tradition du calcul qui va côtoyer les anciens procédés avant de

---

[87] Chemla, K. ; Djebbar, A. et Mazars, G. (1992), « Monde arabe, chinois, indien : quelques points communs dans le traitement des nombres fractionnaires », Actes du Colloque International sur l'Histoire des fractions (Paris, 30-31 Janvier 1987), Benoit, P. ; Chemla K. et Ritter, J. (édit.) : *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Bâle-Boston-Berlin, Birkhäuser Verlag, p. 263-276.

s'imposer définitivement, grâce à l'enseignement et à la diffusion d'un certain nombre d'ouvrages qui lui étaient consacrés. Cette tradition se distinguera par les différents noms qu'on lui donnera (calcul indien, science des chiffres de poussière, calcul à l'aide de la tablette) et par ses manuels. Ces derniers adopteront une structure semblable (définition du système décimal positionnel, présentation des quatre opérations arithmétiques, en commençant par l'addition, exposé du procédé d'extraction de la racine carrée), avec l'ajout de chapitres nouveaux en fonction des besoins et des traditions locales (la règle de trois, les répartitions proportionnelles, la méthode de l'inverse[88] et celle de la double fausse position[89]).

Un des éléments qui nous autorise à rattacher toutes les pratiques qui viennent d'être mentionnées au savoir vernaculaire, est le fait que les mathématiciens des pays d'Islam qui les évoquent ne se réfèrent, à leur sujet, à aucune source écrite. Ils se contentent parfois de dire que ce sont des pratiques en usage à leur époque. En tout cas, ils les distinguent clairement d'une autre catégorie de procédés qu'ils rattachent soit à la tradition grecque soit à celle de l'Inde.

Dans la tradition arabe des IX^{e}-XVII^{e} siècles, le premier grand chapitre de la science du calcul regroupait les quatre opérations classiques de l'arithmétique, avec une place importante accordée à la multiplication. Cette dernière a

[88] Elle consiste à partir de la dernière opération énoncée dans le problème et à remonter jusqu'à la donnée initiale, en effectuant des opérations arithmétiques inverses.

[89] La méthode de fausse position consiste à prendre un nombre au hasard et à vérifier s'il est solution du problème. S'il ne l'est pas, ce qui est le cas en général, on refait l'opération avec un second nombre pris au hasard. Si, de nouveau, il n'est pas solution du problème, alors on introduit ces deux nombres dans une formule connue. Le résultat des calculs donne la solution exacte du problème.

même bénéficié d'un nombre significatif d'algorithmes devant répondre, à la fois, à des besoins spécifiques de certaines catégories de calculateurs et à un double souci d'efficacité et d'optimisation. Il y eut ainsi les techniques dites « *par effacement* », adaptées aux planches à calcul que l'on pouvait utiliser indéfiniment puis, avec l'extension du papier et sa relative démocratisation, de nouvelles méthodes, dites « sans effacement » ont été élaborées et enseignées. Suivant les besoins du calculateur et ses capacités, ces techniques reposaient ou non sur la mémorisation de résultats intermédiaires[90].

De plus, compte tenu de la masse de calcul qu'exigeaient certaines disciplines comme l'astronomie (dont la confection des tables trigonométriques nécessitait des calculs très nombreux et de plus en plus précis), les mathématiciens ont très vite pensé à optimiser leurs calculs en élaborant des méthodes spécifiques à certaines opérations (comme l'élévation au carré ou la duplication), et ce, dans le but de gagner du temps. On a ainsi distingué le produit « par translation » et celui « par semi-translation », le second étant mieux adapté au calcul des carrés d'entiers. C'est d'ailleurs ce souci d'optimisation qui poussera un mathématicien du XIVe-XVe siècle, Ibn al-Majdi, à comparer les vitesses de ces deux derniers algorithmes de multiplication, en dénombrant les opérations élémentaires qui constituent leurs « programmes » respectifs. C'est ce même souci qui explique la présence dans le *Talkhîs* d'Ibn al-Bannâ (m. 1321) qui n'est qu'un résumé comme son titre l'indique, de pas moins de quinze algorithmes de multiplication.

Le second chapitre du calcul concerne les algorithmes d'extraction de la racine nième d'un nombre. Il englobe les tests qui permettent de reconnaître si un nombre peut être

[90] Souissi, M. (1969), *op.cit.*, p. 54-62.

une puissance parfaite. Pour n = 2, par exemple, ces tests portent sur la nature du dernier chiffre du nombre et sur celle des restes dans les divisions du nombre donné par 7, 8, 9, successivement. La seconde étape est constituée par l'algorithme classique d'extraction de la racine carrée ou cubique d'un carré ou d'un cube parfait. La troisième étape concerne l'approximation proprement dite et c'est elle qui a permis la mise au point de plusieurs procédés. Ici, le souci d'optimisation des calculateurs arabes apparaît aussi dans l'amélioration de telle ou telle méthode ou son remplacement par une autre jugée meilleure, dans le sens d'une minimisation de l'erreur et d'un accroissement de la vitesse de convergence des algorithmes.

Le troisième et dernier chapitre, celui où l'innovation est la plus frappante, a trait à l'approximation des solutions positives d'une équation trigonométrique ou polynômiale. Il n'est d'ailleurs pas étonnant de constater que ce chapitre est étroitement lié aux deux domaines les plus féconds des mathématiques arabes : l'astronomie (avec sa nouvelle discipline, la trigonométrie) et l'algèbre (avec, en particulier, l'élaboration de la théorie des polynômes, la résolution algébrique des équations du second degré ou celles qui s'y ramènent, et enfin la recherche des solutions positives des équations cubiques).

En conclusion, il faut remarquer que, dans la tradition mathématique arabe, les algorithmes ont également joué un rôle théorique plus important. En effet, grâce à la possibilité qu'ont eu les calculateurs de pousser très loin la précision de leurs approximations d'une racine nième, de la solution d'une équation ou d'un rapport irrationnel, comme le fameux rapport du périmètre du cercle à son diamètre, certains d'entre eux ont, dès le X^{e} siècle, perçu la notion de nombre réel (positif) et ont été amenés à en élaborer une définition satisfaisante. C'est ce qu'a fait, en particulier, cUmar al-Khayyam[91].

Bibliographie

Aballagh, M. (1988), *Raf^c al-hijâb d'Ibn al-Bannâ* (1256-1321), thèse de Doctorat, Paris, Université Paris I-Panthéon-Sorbonne. Cf. également Ibn al-Bannâ : *Kitâb al-usûl wa l-muqaddimât* [Le livre des fondements et des préliminaires], Djebbar (édit. & trad.). Djebbar, A. (1990), *Mathématiques et Mathématiciens du Maghreb médiéval (IXe-XVIe siècles): Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*, thèse de Doctorat, Université de Nantes-Université de Paris-Sud, vol. II.

Abû Kâmil (1986), *Kitâb l-jabr wa l-muqâbala* [Le livre de l'Algèbre et de la Muqabala], F. Sezgin (édit.), Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Fac simile du Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha, 379), Frankfurt.

Abû l-Wafâ', *Kitâb fî ma yahtâju ilayhi as-sâni' min 'ilm al-handasa* [Livre sur ce dont a besoin l'artisan en science de la géométrie], al-Alî, S.-A. (édit.), Bagdad, Imprimerie de l'Université de Bagdad, 1979.

Al-Bayhaqî : *Târîkh 'ulamâ' al-Islâm*, M. H. Muhammad (édit.). Le Caire, Maktabat ath thaqâfa addîniya, 1996.

Al-Khayyâm, *Risâla fî sharh mâ ashkala min musâdarât Kitâb Uqlîdis* [Epître sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide], Sabra, A. (édit). Alexandrie, 1961.

Al-Qummî, *Risâla fî imkân wujûd al-khattayn al-ladhayn yaqtaribân abadan wa lâ yaltaqiyân*, Ms. Leiden, Or. 14, f. 229 a.

Al-Sijzî, *Kitâb fî tashîl as-subul li istikhrâj al-alshkal al-handasiyya* [Traité visant à faciliter les méthodes de résolution des problèmes géométriques], Saïdan, A.-S., *Rasâ'il Ibn Sinân*,

[91] Djebbar, A. (2002), « L'épître d'al-Khayyâm sur "L'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide" », *Revue Farhang* (Téhéran), vol. 14, n° 39-40, p. 79-136.

op.cit., Appendice 3 ; Hogendijk, J.-P. (1996), *Al-Sijzî's Treatise on Geometrical Problem Solving*, Téhéran, Fatemi Publishing Co..

Al-Tûsî, *ar-Risâla al-shâfiya ‘an al-shakk fî l-khutût al-mutawâziya* [Epître qui délivre du doute relatif aux lignes parallèles], Jaouiche, K. *La théorie des parallèles en pays d’islam*, *op.cit.,* p. 204.

Aristote, *Métaphysique*, Tricot, J. (trad.), Paris, Vrin, 1940, 989b 32 ; 1064a 31-32.

Chemla, K. ; Djebbar, A. et Mazars, G. (1992), « Monde arabe, chinois, indien : quelques points communs dans le traitement des nombres fractionnaires », Actes du Colloque International sur l'Histoire des fractions (Paris, 30-31 Janvier 1987), Benoit, P. ; Chemla K. et Ritter, J. (édit.) : *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Bâle-Boston-Berlin, Birkhäuser Verlag.

Clagett, M. (1954), « A Medieval Latin Translation of a short Arabic Text on the Hyperbola », *Osiris*, 11 (1954), p. 359-385 ; Al-Tûsî : *Oeuvre*, Rashed, R. (édit.), Paris, 1986, vol. 1, p. 5-15 ; vol. 2, p. 129-139. Pour Ibn al-Haytham, cf. Sezgin, F., G.A.S., *op.cit*, p. 373.

Djebbar, A. et Rashed, R. (1981), *L’œuvre algébrique d’al-Khayyâm*, Alep, Université d’Alep.

——————————— (1981), *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*, Alep, Institut d’Histoire des Sciences Arabes.

Djebbar, A. (2002), « L'épître d'al-Khayyâm sur "L'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide" », *Revue Farhang* (Téhéran), vol. 14, n° 39-40.

————— (1993), « Deux mathématiciens peu connus de l’Espagne du X^{e} siècle : al-Mu’taman et ibn Sayyid », Colloque International sur *Les mathématiques autour de la Méditerranée jusqu’au XVIe siècle*, Marseille Luminy, 16-21 avril 1984, Folkerts, M. et Hogendijk, J.-P. (édit.), Vestigia Mathematica, Studies in medieval and earlv modem mathematics in honour of H.L.L Busard, Amsterdam-Atlanta, GA.

————————, « Les mathématiques dans l'œuvre d'Ibn Sînâ (370/980-428/1037) », Actes des Journées Avicenne (Marrakech, 25-26 septembre 1998), Marrakech, G. I. E. S.

————————, « Pratiques savantes et savoirs traditionnels en pays d'Islam : l'exemple des sciences exactes », Actes du Colloque International sur *Science and Tradition : Roots and wings for Development*, (Académie Royale des Sciences d'Outre-Mer & UNESCO, Bruxelles, 5-6 avril 2001), Bruxelles.

———————— (1985), *L'analyse combinatoire dans l'enseignement d'Ibn Muncim*, Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 85-01.

———————— (1980), *Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e-XIV^e siècles*, Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 81-02.

Gingerich, O. (1986), *L'astronomie en Islam*, *Pour la science*, Paris, Avril, p. 69. Sur la contribution d'Ibn ash-Shâtir en Atronomie théorique, cf. Kennedy, E.-S. et Ghanem, I. (1976), *The life and Work of Ibn al-Shâtir, an Arab Astronomer of the fourteenth Century*, Alep, University of Aleppo.

Hogendijk, J. P. (edit. & trad.) (1996), A1-Sijzi's Treatise on Geometrical Problem Solving. Téhéran, Fatemi Publishing Co.

Ibn al-Haytham, *Kitâb hall shukûk Uqlîdis fî l-usûl wa sharh ma'ânîh* [Livre sur la résolution des doutes des Éléments d'Euclide et l'explication de ses notions], Ms. Istanbul, Bibliothèque de l'Université, n° 800, in Fac Simile, Sezgin F. (édit.), Frankfurt, 1985.

Ibn al-Majdî, *Hâwî l-lubâb* [Le recueil de la moelle], Ms. Londres, British Museum, Add. 7469, f. 199 a.

Ibn Qurra, *Fî l-hujja al-mansûba ilâ Suqrât fî l-murabba^ci wa qutrihî* [Sur la preuve attribuée à Socrate au sujet du carré et de sa diagonale], Ms. Le Caire, Dar riyyada, m/40, ff. 162a-162b.

Ibn Qurra, *Qawl fî tashîh masâ'il al-jabr bi l-barâhîn al-handasiyya* [Propos sur la vérification des problèmes d'algèbre par les démonstrations géométriques], Ms. Oxford Bodl., Thurston 3970/3, f. 140b.

Ibn Qurra, *Risâla fi kayfa yanbaghî an yuslaka ilâ nayli 1-matlûb min al-ma'âni al-handasiya* [Epître sur la manière de procéder pour obtenir ce qui est demandé au sujet des notions géométriques], Ms. Aya Sofya 4832, f. 1b-4a.

Ibn Qurra, *Risâla fi l-hujja al-mansûba ilâ Suqrât fi l-murabba' wa qutrihî* [Sur la preuve attribuée à Socrate à propos du carré et de sa diagonale]. Ms. istanbul. Aya Sofya 4832, ff. 40a-42a, cf. également Sayili, A. (1960), Thâbit Ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem, *Isis*.

Ibn Tâhir (1985), *at-Takmila fi l-hisâb* [La complétion en calcul], A. S. Saidan (édit.), Koweit, Manshûrât ma'had al-makhtûtât, p. 190-191. Pour une traduction française de ces textes, cf. A. Djebbar (1998), *Le raisonnement géométrique dans la tradition mathématique arabe*, Actes du Colloque International sur "*Le raisonnement géométrique, enseignement et apprentissage*" (E.N.S. de Marrakech, 28-30 mai 1997), Marrakech, Imprimerie Walili..

Jaouiche, K. (1976), *Le livre du Qarastun de Thabit Ibn Qurra*, Leyde, Brill.

Karpova, L. et Rosenfeld, B. (1975), « The treatise of Thâbit Ibn Qurra on section of cylinder and on its surface », *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* n° 94. Sur Ibn al-Haytham, cf. Djebbar, A. et Rashed, R., *L'œuvre algébrique d'al-Khayyam*, *op.cit.*, p. 66. Sur Ibn Sayyid, cf. Alaoui, J. (1983), *Rasa'il falsafiyya li Abi Bakr Ibn Bajja jja* [Lettres philosophiques d'Abu Bakr Ibn Bajja], Beyrouth, Dar ath-thaqafa - Casablanca, Dar an-Nashr ; Djebbar, A. (1993), *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e^ siècle: al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, Folkerts, M. et Hogendijk, J.-P. (édit.), *Vestigia Mathematica*, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L., Busard, Amsterdam-Atlanta, GA.

Kennedy, E.-S. (1966), « Late Medieval Planetary Theory », *Isis*, vol. 57, n° 189.

Maïmonide, *Le guide des égarés*, Munk, S. (trad.), Paris, Verdier, 1979.

Massignon, L. et Arnaldez, G. (1957), « La science arabe », Taton, R., *Histoire générale des sciences*, Paris, vol. I, p. 449-459.

Nazîf, M. (1942-1943), *Al-Hasan Ibn al-Haytham buhuthuhu wa kushufuhu al-basariyya* [Al-Hasan Ibn al-Haytham, ses recherches et ses découvertes en optique], Le Caire, vol. I et II.

Pappus (1982), *La Collection mathématique*, Ver Eecke, P. (trad.), Paris, Blanchard, vol. II.

Pines S. (1964), *Ibn al-Haitham's Critique of Ptolemy*, Actes du Xe Congrès International d'Histoire des Sciences, Paris, vol. 1.

Rashed, R. (1991), « L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham », Rashed, R. (dir.) : *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique : hommage à Jules Vuillemin*, Paris.

——————— (1981), « Ibn al-Haytham wa hajm al-mujassam al-mukâfi' [Ibn al-Haytham et le volume du paraboloïde] », *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 5, n° 1-2.

Rosenfeld, B.-A. et Youschkevitch, A.-P. (1989), *The Theory of Parallels in the Arabic Literature of the 9-14 th Centuries*, Chalhoub, S. et 'Abdul-Rahmân, K.-N. (édit. & trad.), Alep, Matba'at Jâmi't Halab.

Rosenfeld, B.-A. (1971), *Geometrical transformations in the medieval East*, XIIe Congrès International d'Histoire des Sciences, III, A.

Saïdan, A.-S. (1983), *Rasâ'il Ibn Sinân* [Les épîtres d'Ibn Sinan], Kuwait, p. 67-143 ; Bellosta, H. (1994), *L'analyse et la synthèse selon Ibrahim Ibn Sinan*, thèse de doctorat, Paris, Université de Paris VII.

Souissi, M. (1969), *Ibn al-Bannâ, Talkhîs acmâl al-hisâb* [Abrégé des opérations du calcul], Tunis, Publications de l'Université de Tunis.

Suter, H. (1902), Bibliotheca Mathematica, 3, F.3.