Les cahiers du CRASC, n° 33, 2018, p. 81-102

Tracé de paraboles : histoire et approche pédagogique

Benaouda BENNACEUR [1,2]

Introduction

Il est très frappant de constater, à travers l'enseignement des mathématiques en première année universitaire, sciences exactes, que l'étudiant est souvent mal à l'aise lorsque la nécessité s'impose de tracer des figures géométriques ou de représenter des fonctions élémentaires dans un repère. Ainsi, au tableau ou sur la feuille, la sphère dessinée devient un cercle, le cône n'est plus qu'un angle formé par deux demi-droites dont le sommet pointe vers le haut ou vers le bas, une parabole (dans sa plus simple expression analytique) risque de n'être qu'une droite et ne parlons pas des fonctions sinusoïdales qui partent dans tous les sens sauf dans le bon. On ne peut évidemment pas mettre en accusation un manque total de connaissances dans ce domaine puisque le dessin géométrique et les représentations des fonctions élémentaires sont enseignés à profusion à partir du collège. À titre d'exemple, on trouve,

[1] Université Oran 1, Département de Mathématiques, 31 000, Oran, Algérie.
[2] Centre de Recherche en Anthropologie Sociale et Culturelle, 31 000, Oran, Algérie.

dans des livres[1] de quatrième année moyenne, les notions de translation et de vecteurs, celles de fonctions linéaires ou affines, des dessins de parabole et même des figures de géométrie dans l'espace.

Le problème se situe donc plus dans la qualité des apprentissages mathématiques que dans des contenus pléthoriques des manuels. En effet, nous avons eu maintes fois l'occasion de l'observer : l'enseignement des mathématiques s'éloigne souvent du traitement intuitif et le dessin au lieu de servir d'appui au raisonnement est relégué au second plan, sinon ignoré. La figure n'a pas ce statut épistémologique qui peut lui revenir de droit en tant qu'élément constitutif d'un savoir : le tracé par points d'un arc de parabole participe de la connaissance de la parabole autant que son équation analytique. La connaissance relative à l'ellipse tient à la fois de son équation abstraite que de son tracé intuitif. Par conséquent, sur le plan des apprentissages, il y a autant à faire sur le plan géométrique que sur le plan de l'expression analytique.

Ainsi, le rapport entre figure géométrique et équation analytique demeure un obstacle chez l'élève dans ses apprentissages mathématiques. En effet, l'enseignement des mathématiques évacue souvent les enjeux des savoirs et réduit les apprentissages à leur dimension technique : on commence par écrire l'expression d'une fonction et on invite l'élève à tracer la courbe représentative de cette fonction par la méthode habituelle de la construction d'un tableau de variation de cette fonction.

Or, historiquement, le tracé de courbes était une préoccupation constante chez les mathématiciens qui se demandaient à quoi pouvait ressembler géométriquement

---

[1] El Aidi, M. ; Daimallah, M. et Saha, F. (2006), *Mathématiques, 4ème année moyenne*, Alger, Office National des Publications Scolaires, p. 84-268.

ce lien de dépendance entre deux grandeurs x et y. Ainsi, à titre d'exemple, en est-il pour le problème grec dit des moyennes proportionnelles pour lequel il s'agit, à partir de deux segments donnés a et b, de construire deux autres segments x et y vérifiant : $a/x = x/y = y/b$.

Si nous prenons le cas particulier où $b = 2a$, alors la deuxième égalité donne : $y^2 = bx = 2ax$, ceci d'une part. D'autre part, la première égalité donne : $ay = x^2$, d'où : $x^3 = 2a^3$. Cette dernière égalité donne la solution au problème de la duplication du cube. Rappelons que le problème de la duplication du cube consiste à déterminer l'arête d'un cube dont le volume serait le double d'un cube donné d'arête a. Ainsi, si x mesure cette arête, x vérifierait : $x^3 = 2a^3$.

D'où l'importance de connaitre cette courbe qui associe ces deux grandeurs x et y par la relation $y^2 = bx$ ou par la relation $x^2 = ay$. Autrement dit, l'intersection des deux courbes vérifiant $x^2 = ay$ et $y^2 = 2ax$ fournirait la solution de la duplication du cube d'arête égale à a. C'est une des raisons pour laquelle, Ménechme[2] (350 avant J.C) introduisit la parabole pour visualiser la dépendance géométrique entre x et y.

L'évolution historique de la géométrie traduit bien ce besoin de voir la forme de telle ou telle courbe et celui d'en extraire les propriétés afin de pouvoir la caractériser. La géométrie analytique a incarné, à un moment de cette évolution, cette nécessité de la représentation géométrique de courbes dont on cherchait la forme et les propriétés[3].

[2] Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J. (1982), *Route et dédales*, Paris, éd. Etudes vivantes, p. 59-62 ; 2e édition (1986) : *Une Histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Paris, éd. du Seuil, p. 64-67.

[3] Songeons à la représentation de la cycloïde (lieu géométrique d'un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite) et de ses propriétés.

Sur le plan de l'enseignement, la question qui se pose est : peut-on faire l'économie de toute cette période géométrique, qui a duré des siècles, et initier les élèves au tracé de courbes par, essentiellement, les méthodes modernes d'analyse ?

L'expérience a largement montré que l'enseignement mathématique gagnerait à développer davantage les activités du dessin géométrique car, combien de fois avons-nous constaté que, par exemple, lorsqu'on demande à un étudiant de dessiner un cube au tableau il n'est pas rare de voir le dessin d'un carré. Pourtant les constructions géométriques ne sont pas abstraites et n'apparaissent pas arbitraires à l'élève comme les définitions théoriques de certains aspects de l'algèbre. La figure, le dessin, sont concrets et ont du sens pour l'élève, de plus essayer de dessiner une parabole, un cube ou une sphère, tout en éclairant leurs propriétés, participe d'une activité qui développe l'intuition (l'intuition liée à l'espace pour permettre à l'enfant de commencer à se situer dans l'espace dans lequel il vit) de façon non négligeable et il est bien connu que l'activité mathématique ne peut se passer de l'intuition.

La question qui se pose maintenant est de savoir comment réconcilier les enseignés avec le sens géométrique, celui du dessin (même approximatif) et celui de la figure sur laquelle une réflexion pourrait être menée.

Dans le cadre des thèmes mathématiques du PE, j'ai entrepris une étude et une réflexion portant sur l'utilisation pédagogique de textes mathématiques anciens ayant abordé le tracé par points de courbes du second degré et en particulier celui de la parabole.

C'est pourquoi, le plan de cette étude s'articulera autour de deux points principaux. Dans un premier temps, nous présentons, à travers un problème posé à des étudiants, les difficultés pour un tracé de parabole, suivies de commentaires. Dans un deuxième temps, il s'agira de proposer une alternative pédagogique de tracé inspirée directement de travaux de mathématiciens arabes, à savoir ceux d'Abū l-Wafā' (m. 997) et d'Ibn Sinān (m. 942). Nous nous sommes volontairement restreints à l'évocation de ces deux mathématiciens arabes sachant pertinemment que la littérature sur la problématique des coniques et de leurs tracés ne se limite pas à ces deux mathématiciens[4].

Pour le premier, Abū l-Wafā', nous nous sommes inspirés de l'article de Franz Woepcke[5]. Pour le second, Ibn Sinān, nous nous référons à une traduction[6] et nous nous sommes basés sur un document, traduit de l'arabe au français, intitulé *Rasā'il Ibn Sinān* [*Les épîtres d'Ibn Sinān*], édité par Ahmad Salim Saïdan, membre du comité de la langue arabe jordanien, 1983.

[4] Apollonius de, P. (1959), *Les Coniques*, Ver Eeecke, P. (trad.), Paris, Blanchard, p. 7-50.
Apollonius de, P. (1990), *Conics, Books V to VII*, Toomer, G. J. (édit. & trad.), Berlin, Springer-Verlag, 2 vols, p. 16-31.
Apollonius de, P. (2008), *Coniques*, t. 1.1 : Livre I, Rashed, R. (édit.), Berlin, éd. De Gruyter, p. 44-65.
Apollonius de, P. (2008), *Coniques*, t. 1.2 : Livre I, Decorps-Foulquier, M. et Federspiel, M. (édit.), Berlin, éd. De Gruyter, p. 341-399.
Rashed, R. (1993) : *Géométrie et dioptrique au X^e siècle*, Paris, éd. Les Belles Lettres, p. 57-64.
Bouzari, A. (1999) : *Les Coniques dans les mathématiques arabes à travers un traité attribué à al-Khāzin (X^e s.)*, mémoire de Magister, Alger, E.N.S, p. 10-32.

[5] Woepcke, F. (1855), Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Abū l-Wafā', *Journal Asiatique*, 5^e série, vol. 5, p. 218-256 ; p. 325-327. Reproduction en fac simile in Sezgin, F. (édit.) (1986) : *Franz Woepcke, Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques*, Frankfurt, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenchaften, vol. I, p. 538-540.

[6] Saïdan, A.-S. (édit.) (1983), *Rasā'il Ibn Sinān* [Les épîtres d'Ibn Sinān], Koweit, Conseil National pour la Culture, les Arts et les Lettres, p. 35-52.

Problème et analyse

L'énoncé qui suit a été proposé à des étudiants de première année universitaire du domaine Sciences et Techniques de l'université d'Oran 1 en janvier 2016.

Problème[7]

Faites le graphe de la fonction : $y = |x^2 - 9|$ et déterminez les points où elle est dérivable.

Sur les 29 copies, aucune n'a traité correctement ce problème.

- ➢ La première question, lorsqu'elle est abordée, donne systématiquement un faux graphe.
- ➢ La deuxième question n'est résolue par aucun étudiant.

Analyse de l'échec. Les causes

Du point de vue épistémologique

- ✓ Le rapport au savoir de l'enseignant ne permet pas, en général, une pratique d'enseignement à travers les problèmes.
- ✓ En d'autres termes, l'enseignement n'est pas problématisé.
- ✓ De ce fait, cet enseignement emprunte les voies pédagogiques les plus directes (dogmatisme pédagogique) dans lesquelles le savoir devient plus une marchandise à consommer qu'un objet de questionnement, de réflexion et d'activité scientifique.
- ✓ L'intuition géométrique, dans la pratique d'enseignement, ne participe pas aux apprentissages mathématiques.

Ainsi, la représentation de la parabole qui se construit chez les élèves relève plus d'une équation abstraite que

[7] Il est à observer que cet exercice est du niveau de la 3ème année AS, c'est-à-dire du niveau terminale sciences.

d'une figure géométrique obtenue grâce à une intersection d'un cône et d'un plan ou grâce à une détermination patiente de points qui donnerait une esquisse de la forme générale d'un arc de parabole. C'est pourquoi, on trouve, dans les copies des étudiants, des figures représentant des droites, des sinusoïdes et des morceaux de courbes.

Du point de vue didactique

La pratique d'enseignement des courbes les plus usuelles (droite, cercle, fonction exponentielle et logarithmique, parabole, etc.) privilégie les calculs analytiques (tableau de variation, calcul mécanique de dérivées, etc.) au détriment d'une approche et d'une représentation géométriques de ces courbes.

Cependant, un traitement géométrique du tracé d'une parabole est susceptible de réaliser plus durablement un apprentissage sur la parabole et son tracé.

Dans ce tracé de la parabole qui est demandé, on peut donc relever les raisons de l'échec des étudiants par l'existence, chez eux :

➢ D'un obstacle épistémologique car la parabole, en tant que concept, reste confinée dans un statut abstrait. Mais le concept de parabole est-il tout entier dans l'expression de son équation cartésienne ? La problématique historique de la parabole ne provient-elle pas précisément de la question : quelle forme géométrique obtient-on lorsqu'on coupe un cône par un plan ?

➢ D'un obstacle didactique : son enseignement néglige la dimension géométrique et par conséquent néglige tout procédé de tracé d'une parabole, à la main ou à l'aide d'un logiciel.

Y a-t-il alors une alternative à une telle approche centrée essentiellement sur des calculs qui, hélas, ne favorisent pas les apprentissages pour une appréhension plus complète du concept de parabole ?

Approche pédagogique en s'inspirant de l'Histoire des mathématiques

Il semble que les mathématiciens grecs ont observé que les faisceaux lumineux parallèles (comme les rayons du soleil) qui frappaient des surfaces planes et courbes ne se réfléchissaient pas de la même façon. Pour les surfaces planes, les rayons se réfléchissaient toujours parallèlement, ce qui n'était pas le cas pour les surfaces en forme d'arc de cercle par exemple ou en forme d'arc de parabole qui, eux, se réfléchissaient en quelques points ou en un seul point. Les miroirs ayant cette propriété géométrique de réfléchir des rayons lumineux parallèles en un point unique ont été appelés miroirs ardents[8].

Des mathématiciens du monde musulman, héritiers des grecs, se sont alors efforcés de trouver des procédés ingénieux pour construire des figures géométriques telles que des paraboles, ellipses ou hyperboles qui répondaient à ce besoin de mettre au point des miroirs ardents, c'est-à-dire des miroirs pouvant brûler des cibles ennemis à distance.

D'où le préalable d'un savoir-faire pour le tracé des sections coniques.

Nous présentons, dans ce qui suit, ce tracé par points de la parabole selon Abū l-Wafā' et selon Ibn Sinān.

Mais une question avant cette présentation : quel est l'enjeu de cette approche dite historique ?

[8] D'où la légende qui attribue à Archimède l'exploit d'avoir brûlé les navires du général romain Marcellus grâce à un miroir parabolique.

Premièrement, il s'agira de montrer aux élèves (niveau lycée) que les mathématiciens partent parfois de questions qui s'expriment simplement (comment trouver un moyen pour tracer correctement une parabole ou une ellipse ?).

Deuxièmement, d'engager les élèves dans une activité mathématique à leur portée. Nous pensons qu'il est d'un grand intérêt pédagogique que les élèves mettent « la main à la pâte » en fabriquant eux-mêmes (avec l'aide de l'enseignant) des courbes point par point. Cette activité étant non seulement constituée en des figures tracées moyennant l'utilisation de la règle et du compas mais aussi, si possible, en une justification car il s'agit de trouver des points qui appartiennent bien à une parabole ou à une ellipse, etc.

Troisièmement, de montrer aux élèves que des propriétés géométriques sur les triangles rectangles, étudiées au collège, peuvent trouver, dans ce tracé, tout leur intérêt et que les mathématiques, contrairement à leur enseignement, ne constituent pas un empilement de connaissances sans liens entre elles. Enfin, de révéler, même ponctuellement, un aperçu d'un patrimoine scientifique arabe d'une inestimable richesse.

Nous ne terminons pas ce paragraphe sans insister sur le fait que ce qui suit n'est pas destiné à l'élève mais à l'enseignant de mathématiques, lequel adaptera selon ses besoins la manière de faire travailler ses élèves pour réaliser un tracé de parabole à la fois ludique et porteur d'apprentissage géométrique.

Tracé de la parabole d'après Abū l-Wafā'

L'article, dont nous avons parlé plus haut, commence par un problème dont nous recopions l'énoncé, à savoir

« construire un miroir qui brûle, au moyen des rayons du soleil, (un objet placé) à une distance quelconque donnée ».

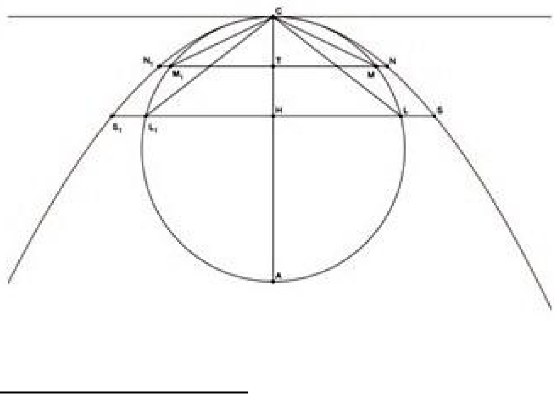
Premier programme de tracé

- On trace un cercle de diamètre AC (figure 1) dont la longueur est fixée à l'avance et, pour des raisons que l'on explicitera ultérieurement, supposons que ce diamètre soit de longueur $2p$[9], i.e. $AC = 2p$. On considère des points quelconques T, H, etc. sur le diamètre AC. On n'en prendra que deux pour illustrer notre construction. On trace les droites perpendiculaires au diamètre AC aux points T et H. Elles coupent le cercle aux points M et L respectivement. Les points M_1 et L_1 étant les symétriques respectifs de M et L par rapport au diamètre AC.

- Considérons le triangle rectangle CTM. Comme CM en est l'hypoténuse, on a $TM < CM$.

Prolongeons alors le côté TM jusqu'à obtenir le point N vérifiant $TM + MN = CM$, i.e. $TN = CM$. On fait la même chose avec le segment HL pour obtenir le point S tel que $HS = CL$.

Figure 1



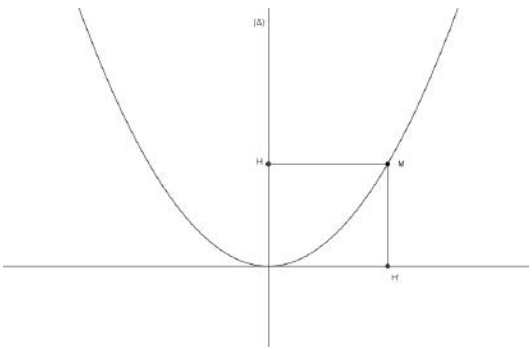
[9] Ce p étant évidemment le paramètre de la parabole à construire. Rappelons que le paramètre d'une parabole est la distance entre le foyer et la directrice de cette parabole.

Abū l-Wafā’ affirme alors que les points N, S, etc., ainsi obtenus, sont sur la parabole de sommet C et d’axe de symétrie[10] AC.

Justification

Ici, Abū l-Wafā’, à la suite d’Apollonius[11], utilise une propriété caractéristique de la parabole. En effet, selon Apollonius, un point M (figure 2) appartient à la parabole de diamètre (Δ) (ici il s’agit de l’axe de symétrie) si et seulement si MH^2 est proportionnel à MH’ où H est la projection orthogonale de M sur (Δ) et H’ la projection orthogonale de M sur le diamètre (Δ’) dit conjugué, i.e. (Δ’) n’est autre que la droite perpendiculaire à (Δ), passant par son sommet.

Figure 2



En effet, montrons que le point S vérifie cette propriété.

On a par construction : $HS^2 = CL^2$, or dans le triangle rectangle CHL, on peut écrire que :

[10] Axe de symétrie ou axe focal, appelé aussi diamètre (focal) de la parabole.

[11] Apollonius de Perge (IIIe s. av. J.C.). Son principal ouvrage s’appelle : « *Les Coniques* ».

$CL^2 = HL^2 + HC^2$. Mais comme CA est le diamètre du cercle et que par conséquent le triangle CLA est rectangle en L : $HL^2 = HC.HA$.

Ainsi : $HS^2 = CL^2 = HL^2 + HC^2 = HC.HA + HC^2 = HC.(HA + HC) = HC.AC$. Donc: $HS^2= (2p).HC$.

En résumé, SH n'est autre que la distance de S à l'axe porté par AC et HC n'est autre que la distance de S à l'axe perpendiculaire à AC passant par C et c'est le produit du nombre fixe $2p$ par HC qui est constant et égal à HS^2.

Le point de vue analytique

D'un point de vue analytique, si cette perpendiculaire à l'axe AC, passant par C est l'axe des abscisses et l'axe porté par AC est l'axe des y avec C comme origine et si le point S a comme coordonnées x et y, i.e. S : (x, y), alors l'égalité $HS^2 = HC.AC$ deviendra :

$x^2 = - (2p)y$, car $AC = 2p$. Le signe (-) du fait que $p > 0$ et l'ordonnée de S est négative dans notre figure 1.

On reconnait, dans cette formule, l'expression analytique d'une parabole dont l'axe est l'axe des ordonnées porté par CA et dont la tangente au sommet est l'axe des abscisses avec le point C comme à la fois sommet de la parabole et comme origine du repère.

Construction par points d'une parabole

Supposons que l'on veuille construire une parabole d'axe vertical, qui tourne sa concavité vers le bas et de sommet donné appelé C.

✓ On prend un autre point A sur cet axe vertical dont la distance avec C sera notée $2p$:

$AC = 2p$, p est un nombre réel strictement positif. L'ouverture de la parabole sera proportionnelle à p.

✓ On trace le cercle de diamètre AC.

✓ On prend des points quelconques sur ce diamètre, par exemple T et H.

✓ On trace les perpendiculaires à ce diamètre passant par les points T et H. Elles coupent le cercle aux points M et L respectivement.

✓ On construit les points N et S sur ces perpendiculaires tels que TN = CM et HS = CL.

✓ Les points N, L, etc. appartiennent à la parabole d'axe AC et de sommet C.

Une autre justification du fait que S appartient bien à une parabole.

Cette justification utilise une autre propriété caractéristique de la parabole, géométrique celle-là, à savoir qu'elle est le lieu géométrique des points situés à égale distance d'un point (appelé foyer) et d'une droite (appelée directrice)[12].

Ici, il s'agit de placer convenablement le point F et la directrice (D) (Voir figure 3).

✓ On considère le point F sur l'axe AC, entre C et A tel que FC = AC/4 = $2p/4 = p/2$.

✓ On prend le symétrique F' de F par rapport au point C.

✓ On trace la droite (D) perpendiculaire à l'axe AC et passant par F'. Ainsi, la distance entre F et la droite (D) est égale à p appelé aussi le paramètre de la parabole[13].

✓ Soit S' la projection orthogonale du point S sur la droite (D)

Montrons que S est à égale à distance de F et de (D), i.e. SF = SS'.

---

[12] Il est clair que la parabole est beaucoup plus connue et utilisée (au niveau du lycée) comme étant la représentation graphique de la fonction $y = ax^2 + bx + c$, que sous la forme d'une courbe d'un certain lieu géométrique.

[13] Ce qui justifie que l'on ait pris dès le départ un cercle de diamètre égal à $2p$.

En effet,

$SF^2 = HS^2 + HF^2 = CL^2 + HF^2 = HL^2 + HC^2 + HF^2 = HC.HA + HC^2 + HF^2 = HC.[HA + HC] + HF^2 = HC.AC + HF^2 = [HF + FC].AC + FH^2 = HF.AC + FC.AC + FH^2 = HF.AC + AC^2/4 + FH^2$, car $FC = AC/4$.

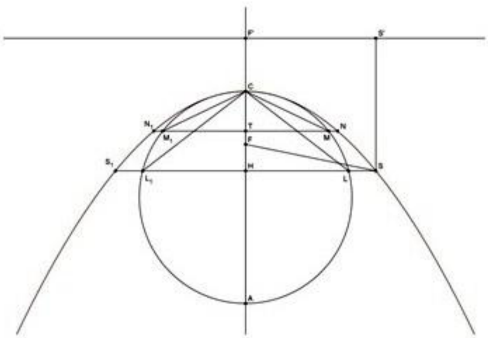
Ainsi : $SS'^2 = HF. AC + AC^2/4 + HF^2$. Ceci d'une part

D'autre part, $SS'^2 = HF'^2 = [HF + FF']^2 = HF^2 + FF'^2 + 2 HF. FF' = HF^2 + [AC/2]^2 + 2 HF.AC/2 = FH^2 + HF.AC + AC^2/4$, car $FF' = AC/2$. Donc : $SS'^2 = HF.AC + AC^2/4 + FH^2$.

Conclusion

$SF^2 = SS'^2$, d'où $SF = SS'$, i.e. S est bien équidistant du point F et de la droite (D), donc S appartient à la parabole de foyer F et de directrice (D).

Figure 3



Deuxième procédé d'Abū l-Wafā' pour le tracé d'une parabole

Cette fois-ci il s'agira d'une parabole qui tournera sa concavité vers le haut (figure 4).

✓ On trace un segment de droite vertical AB de longueur AB = 2*p*, *p* étant un nombre réel strictement positif

✓ On prolonge au-delà de B pour avoir l'axe AC qui sera l'axe de symétrie de notre parabole

✓ On trace la perpendiculaire D_1D à l'axe AC passant par B.

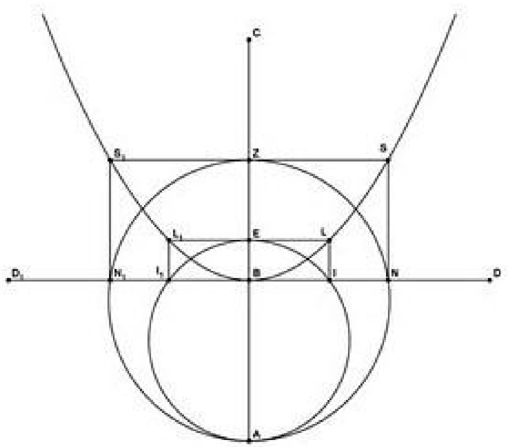
✓ On choisit des points quelconques E, Z, etc. sur cet axe AC

✓ On trace les cercles de diamètre AE, AZ, etc. Ils coupent respectivement D_1D aux points I, N, etc. Les points I_1, N_1, etc. sont les symétriques de I, N, etc. par rapport à l'axe AC

✓ Des points I, N, etc. on élève les parallèles à l'axe AC et des points E, Z, etc. on trace des parallèles à D_1D

✓ Les intersections de ces droites seront les points L, S, etc. Leurs symétriques par rapport à l'axe AC sont les points L_1, S_1, etc.

Figure 4



Les points L, S, etc. appartiennent à la parabole d'axe de symétrie AC et de sommet B.

Justification géométrique

Montrons, par exemple, que L est sur cette parabole.

De la même façon que précédemment, nous allons montrer que le carré de la distance de L à l'axe AC, EL^2, est proportionnel à la distance de L, à la tangente au sommet, IL, c'est à dire :

$EL^2 = (2p)\ IL$

En effet, $EL^2 = BI^2 = BE.AB$, car dans le triangle rectangle EIA, IB en est la hauteur. Donc :

$EL^2 = BE.\ AB = IL.\ AB = (2p).\ IL$.

Justification analytique

D'un point de vue analytique, si l'axe AC représente l'axe des ordonnées, l'axe D_1D celui des abscisses et B l'origine de ces axes, et si le point L a pour coordonnées (x, y) alors on a : $x^2 = EL^2 = (2p)\ IL = (2p).y$, où l'on reconnait l'équation d'une parabole d'axe de symétrie AC et de sommet B.

Justification par le foyer et la directrice

- ✓ Soit F le point sur l'axe AC, placé au-dessus de B (on le placera entre les points B et E pour plus de commodité) tel que $BF = AB/4 = p/2$.
- ✓ Soit F' le symétrique de F par rapport à B.
- ✓ Soit (D) la droite perpendiculaire à l'axe AC passant par F'.
- ✓ Soit L' la projection orthogonale du point L sur la droite (D) (figure 5).

Montrons alors que le point L est à égale distance de F et de la droite (D), i.e. LF = LL'.

En effet,

$LF^2 = EL^2 + EF^2 = EL^2 + [BE - BF]^2 = EL^2 + BE^2 + BF^2 - 2 BE.BF$, or $EL^2 = BI^2 = BE.BA$, donc : $LF^2 = BE.BA + BE^2 + BF^2 - 2 BE.BF$. Or $BF = AB/4$, donc :

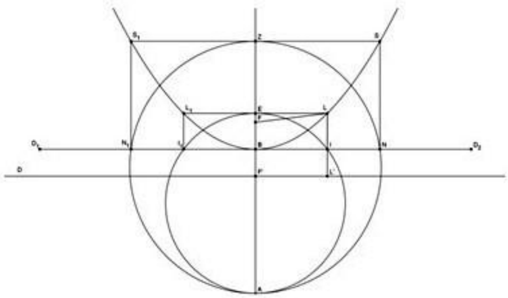
$LF^2 = BE.BA + BE^2 + AB^2/16 - 2 BE.AB/4 = BE^2 + AB^2/16 + BE.AB/2$. Ceci d'une part.

D'autre part : $LL'^2 = [LI + IL']^2 = LI^2 + IL'^2 + 2 LI.IL'$, or $IL = BE$ et $IL' = BF' = BF = AB/4$, donc : $LL'^2 = BE^2 + AB^2/16 + 2 BE.AB/4 = BE^2 + AB^2/16 + BE.AB/2$.

Conclusion

On a bien $LF^2 = LL'^2$, i.e. $LF = LL'$.

Figure 5



Tracé de la parabole d'après Ibn Sinān

Dans « Les épitres d'Ibn Sinān » [*rasā'il Ibn Sinān*], document déjà évoqué, Ibn Sinan dit : « Et comme on a trouvé que la construction de ces coniques est impossible avec le compas ou autre moyen, on a cherché un moyen astucieux pour dessiner plusieurs points indéterminés. Et ce sont ces points qui construisent la conique. Et ce qu'on en a tiré est de montrer comment engendrer ces points à partir du cercle ou autre ».

Ibn Sinān propose alors le programme de tracé de la parabole suivant.

Programme de construction

✓ On trace un segment de droite BS que l'on fixe et on considère (Δ) l'axe horizontal porté par BS. Posons SB = 2*p*, comme précédemment.

✓ On trace l'axe (Δ'), perpendiculaire à (Δ), passant par le point S.

✓ On prend un point Z, quelconque, sur (Δ) dans le prolongement du segment BS.

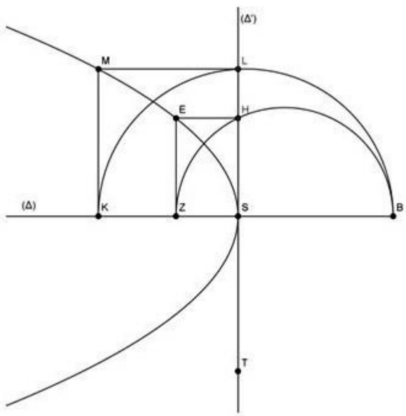
✓ On trace le cercle de diamètre BZ, il coupe (Δ') au point H.

✓ Du point Z, on élève la perpendiculaire à (Δ) et du point H, on trace la perpendiculaire à (Δ'). Elles se rencontrent au point E.

Alors, ce point E est sur la parabole d'axe de symétrie (Δ) et de sommet le point S.

Justification géométrique

Figure 6



En effet, il suffit de montrer que : EZ^2 est proportionnel à EH.

Pour cela, nous considérons le triangle rectangle ZHB qui est rectangle en H puisque BZ est un diamètre. On a alors : $HS^2 = SB.ZS$ car HS est la hauteur issue du sommet H. Or, EZ = HS et EH = ZS, par conséquent, on a bien : $EZ^2 = SB.EH = (2p).EH$.

Justification analytique

On prend Δ comme axe des abscisses, Δ' comme axe des ordonnées et le point S comme origine des coordonnées. Alors, si le point E a pour coordonnées (x, y), la relation $EZ^2 = (2p).EH$ devient : $y^2 = -(2p)x$, le signe moins se justifiant par le fait que $p > 0$ et que les abscisses des points de cette parabole sont négatifs.

Justification par le foyer et la directrice

On considère le point F sur l'axe de la parabole à gauche du point S et tel que $FS = SB/4 = p/2$. Soit F' le symétrique de F par rapport à S, d'où : $FS = SF' = SB/4$.

Traçons la droite (D) perpendiculaire à l'axe (Δ) et passant par F'. Désignons par E' la projection du point E sur la droite (D).

Montrons alors que E est à égale distance de F (foyer) et de la droite (D) (directrice).

En effet :

$EF^2 = EZ^2 + ZF^2 = EZ^2 + (ZS - FS)^2 = EZ^2 + (ZS - SB/4)^2 = EZ^2 + ZS^2 + SB^2/16 - ZS.SB/2$. Mais $EZ^2 = HS^2 = ZS.SB$, donc $EF^2 = ZS^2 + SB^2/16 + ZS.SB - ZS.SB/2$.

Ainsi : $EF^2 = ZS^2 + SB^2/16 + ZS.SB/2 = (ZS + SB/4)^2$. Ceci d'une part.

D'autre part : $EE'^2 = (EH + HE')^2 = (ZS + SF')^2 = (ZS + SB/4)^2$.

On a bien : $EF^2 = EE'^2$, i.e. $EF = EE'$.

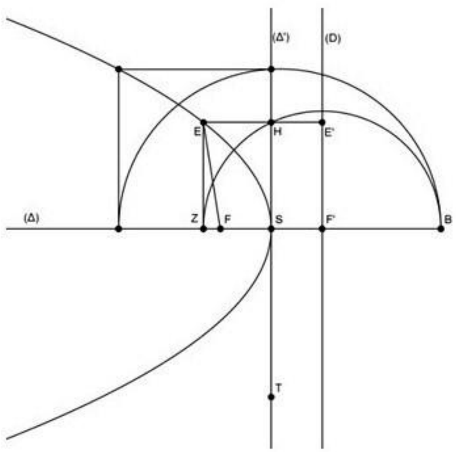
On peut voir cela de façon plus courte en coordonnées cartésiennes.

Si E a pour coordonnées (x, y), F à pour coordonnées $(-p/2, 0)$, la droite (D) est d'équation : $x = p/2$ et si E' (sur la droite (D)) a pour coordonnées $(p/2, y)$, alors :

$EF^2 = (-p/2 - x)^2 + y^2 = x^2 + px + (p/2)^2 + y^2 = x^2 + px + (p/2)^2 - (2p)x = (x - p/2)^2$.

$EE'^2 = (p/2 - x)^2 = (x - p/2)^2$. Par conséquent : $EF = EE'$.

Figure 7



Conclusion

Nous avons essayé dans cette étude de montrer que l'enseignement des mathématiques, aussi bien dans le système éducatif qu'à l'université, peut utilement profiter d'une perspective historique. Il ne s'agit pas de faire de l'histoire des mathématiques à côté d'un enseignement des mathématiques mais d'intégrer, dans une pratique d'enseignement, une problématique offerte par l'histoire des mathématiques (ici, celle d'un tracé de courbes comme la parabole) pour résoudre un problème. En effet, notre enseignement manque surtout du « sens du problème » dont parle Bachelard dans « La formation de l'esprit scientifique »[14] car nous donnons des réponses à des questions qui ne sont pas posées. Ainsi va l'enseignement des sciences chez nous. Par contre si, dès le collège et le lycée, l'enseignement des sciences initie l'élève au questionnement, il y aurait des chances que des apprentissages scientifiques se réalisent. Mais de quelle façon cette initiation pourrait-elle se faire ? Nous en avons donné un exemple en nous inspirant de mathématiciens arabes du X^e siècle. Ces derniers situent leurs préoccupations sans dogmatisme et proposent des méthodes simples de tracé dans lesquelles l'élève, accompagné par son enseignant de mathématiques, peut s'investir. Cependant, cette alternative pédagogique inspirée de l'histoire n'aurait de chance de réussir auprès des élèves qu'à la condition que l'enseignant chargé de la mettre en œuvre y croit aussi en y consentant des efforts tant mathématiques que pédagogiques.

Bibliographie

Al-ᶜAlī Bagdad, S.A. (1979), Abū l-Wafā', *Kitāb fī mā yaḥtāju ilayhi al-ṣāniᶜ min aᶜmāl al-handasa* [Ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques.

Apollonius, P. (2008) : *Coniques*, t. 1.1 : Livre I, Rashed, R. (édit.), Berlin, éd. De Gruyter.

——————— (2008) : *Coniques*, t. 1.2 : Livre I, Decorps-Foulquier, M. & Federspiel, M. (édit.), Berlin, éd. De Gruyter.

——————— (1990), *Conics, Books V to VII*, Toomer, G. J. (édit. & trad.), Berlin, Springer-Verlag, 2 vols.

[14] Bachelard, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, éd. Vrin, p. 16.

——————— (1959), *Les Coniques*, Ver Eeecke, P. (trad.), Paris, Blanchard.

Bachelard, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, éd. Vrin.

Bouzari, A. (1999) : *Les Coniques dans les mathématiques arabes à travers un traité attribué à al-Khāzin (X^e s.)*, mémoire de Magister, Alger, E.N.S.

Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer, J. (1982), *Route et dédales*, Paris, éd. Etudes vivantes, p. 59-62 ; 2^e édition (1986) : *Une Histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Paris, éd. du Seuil.

El Aidi, M. ; Daimallah, M. et Saha, F. (2006), *Mathématiques, 4^ème année moyenne*, Alger, Office National des Publications Scolaires.

Rashed, R. (1993) : *Géométrie et dioptrique au X^e siècle*, Paris, éd. Les Belles Lettres.

Saïdan, A.-S. (édit.) (1983), *Rasā'il Ibn Sinān* [Les épîtres d'Ibn Sinān], Koweit, Conseil National pour la Culture, les Arts et les Lettres.

Woepcke, F. (1855), Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Abū l-Wafā', *Journal Asiatique*, 5^e série, vol. 5, p. 218-256 ; p. 325-327. Reproduction en fac simile in Sezgin, F. (édit.) (1986) : *Franz Woepcke, Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques*, Frankfurt, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenchaften, vol. I.